PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a SÓLO CINTO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1º) Sea la función $f(x) = x \cdot e^{1/x^3}$. Determinar el dominio, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para $x = 0$, por lo cual: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^{1/x^3}\right) = -\infty \cdot e^{-0} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot e^{1/x^3}\right) = +\infty \cdot e^{0} = \infty.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}\right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot \infty \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{3x^2}{x^6} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 3 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{x^2} = 3 \cdot \frac{e^{\frac{1}{0}}}{0} = \frac{3}{0} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}} \right) = -0 \cdot e^{-\frac{1}{0}} = -0 \cdot e^{-\infty} = -\frac{0}{\infty} = 0.$$

$\underline{La\ recta\ x = 0\ (Eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ en\ su\ parte\ positiva}$.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^3}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \left[x \cdot \left(e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \right) \right] =$$

$$= \infty \cdot \left(e^{\frac{1}{\infty}} - 1 \right) = \infty \cdot (e^0 - 1) = \infty \cdot (1 - 1) = \infty \cdot 0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = 3 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{x^2} = 3 \cdot \frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \frac{3 \cdot e^0}{\infty} = \frac{3 \cdot 1}{\infty} = 0.$$

$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua.}$

****

2º) Sea f una función continua cuya derivada es la siguiente: $f'(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$.
Halla la expresión de las funciones f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x=0$.

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \int (x+1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1 \;\; si \;\; x<0 \\ f(x) = \int e^x \cdot dx = e^x + C_2 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C_1, & x<0 \\ e^x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Como quiere que $f(x)$ es continua, para $x=0$ sus límites laterales tienen que ser iguales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right) = C_1.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x + C_2) = e^0 + C_2 = 1 + C_2 = f(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right) = C_1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x + C_2) = e^0 + C_2 = 1 + C_2 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_2 = C_1 - 1.$

$$\underline{f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C, & x<0 \\ e^x - 1 + C, & x \geq 0 \end{cases}}.$$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$m = f'(0) = 0 + 1 = e^0 = 1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = C \Rightarrow P(0, C)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - C = 1 \cdot (x - 0).$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x - y + C = 0}.$$

****

3º) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

En el intervalo $(0, 5)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$ son positivas, por lo cual, el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^5 f(x) \cdot dx = \int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+2=t \\ x+3=t+1 \\ dx=dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x=5 \to t=7 \\ x=0 \to t=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_2^7 \frac{t+1}{t^2} \cdot dt = \int_2^7 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \cdot dt = \int_2^7 \left(\frac{1}{t} + t^{-2}\right) \cdot dt = \left[Lt + \frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^7 =$$

$$= \left[Lt + \frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^7 = \left[Lt - \frac{1}{t}\right]_2^7 = \left(L7 - \frac{1}{7}\right) - \left(L2 - \frac{1}{2}\right) = L7 - \frac{1}{7} - L2 + \frac{1}{2} =$$

$$= L\frac{7}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = L3{,}5 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{14 \cdot L3{,}5 - 2 + 7}{14} = \frac{14 \cdot L3{,}5 + 5}{14}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{14} \cdot (14 \cdot L3{,}5 + 5)\ u^2 \cong 1{,}61\ u^2.}$$

****

4º) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ 2x+ay=-1 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$, según el valor del parámetro real a. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=0$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+2a-a^3-2=0;$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$a^3-3a+2=0.$

Resolviendo por la reglas de Ruffini: $a_1=a_2=1, a_3=-2$.

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2+2+2-4+1-2=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-2 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=0$ es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad |M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2.$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

****

5º) Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{cases}$, donde C y D son las matrices: $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz inversa de $C^t \cdot D$, donde C^t es la matriz traspuesta de C.

$$\left.\begin{array}{r} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 9A - 15B = 3C \\ -5A + 15B = 5D \end{array}\right\} \Rightarrow 4A = 3C + 5D \Rightarrow A = \tfrac{1}{4}(3C + 5D).$$

$$A = \tfrac{1}{4}\left[3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 21 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 36 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3A - 5B = C \\ -3A + 9B = 3D \end{array}\right\} \Rightarrow 4B = C + 3D \Rightarrow B = \tfrac{1}{4}(C + 3D).$$

$$B = \tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$C^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}. \quad (C^t \cdot D)^t = \begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$|C^t \cdot D| = \begin{vmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-26 - 1) = -324.$$

$$Adj.de\ (C^t \cdot D)^t = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$(C^t \cdot D)^{-1} = \frac{Adj.de\ (C^t \cdot D)^t}{|C^t \cdot D|} = \frac{\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}}{-324} \Rightarrow \underline{(C^t \cdot D)^{-1} = \tfrac{1}{162} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) Sabiendo que $|A| = 1$, donde $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{bmatrix}$. Calcular $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2$.

$$|B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot |A| = -2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{|B| = -2}$.

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

Para determinar $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|$ se tiene en cuenta que $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$ y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta: $|A^t| = |A|$, con lo que la expresión $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|$ quedaría de la forma $\left|\frac{4 \cdot A}{B}\right|$. Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es el producto del número por todos y cada uno de los elementos de la matriz y que, si se multiplica un línea de una matriz por un número el valor de su determinante queda multiplicado por dicho número y, también, que la matriz A tiene de dimensión 3×3, resulta que $|4 \cdot A| = 4^3 \cdot |A|$.

De lo anterior se deduce que:

$$|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2 = \left(\left|\frac{4 \cdot A}{B}\right|\right)^2 = \left(\frac{4^3 \cdot |A|}{|B|}\right)^2 = \left(\frac{64 \cdot 1}{-2}\right)^2 = (-32)^2.$$

$$\underline{|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2 = 1.024}.$$

****

7º) Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(0,1,1)$.

2) Está contenida en el plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases}$.

La expresión de $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,1,3)$.

El vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$ y $\vec{n}=(1,1,3)$, que es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3i+j+k+k-i-3j=-4i-2j+2k=$$

$$=(-4,-2,2) \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1).$$

Teniendo en cuanta que $P \in \pi$ por satisfacer su ecuación, como se comprueba a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+3z-4=0 \\ P(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1+3-4=0 \Rightarrow Comprobado\ que\ P \in \pi.$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=1+\mu \\ z=1-\mu \end{cases}}.$$

****

8º) Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,2,1)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $P(2,-1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0 \\ P(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 + D = 0;$$

$4 - 2 + 1 + D = 0;\;\; 3 + D = 0;\;\; D = -3 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0.$

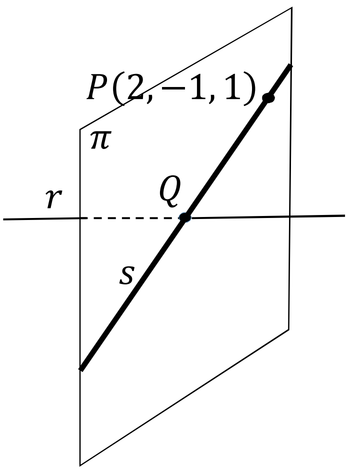
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + \lambda - 3 = 0;$$

$4 + 4\lambda + 2 + 4\lambda + \lambda - 3 = 0;\;\; 9\lambda + 3 = 0;$

$3\lambda + 1 = 0;\;\; \lambda = -\frac{1}{3}.$



$$Q \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Los puntos $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ y $P(2,-1,1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \left[(2,-1,1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right] = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Un vector de la recta pedida, s, es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (1, -2, 2)$.

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}}.$$

****

9º) La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?

b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre 15 y 21 años?

$Datos$: $\mu = 20$; $\sigma = 5$.

$X \to N(\mu, \sigma) = N(20, 5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{5}$.

a)

$$P = P(X < 25) = P\left(Z < \frac{25-20}{5}\right) = P\left(Z < \frac{5}{5}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413 =$$

$= \underline{84{,}13\ \%}$.

b)

$$P = P(15 \leq X \leq 21) = P\left(\frac{15-20}{5} \leq Z \leq \frac{21-20}{5}\right) = P\left(\frac{-5}{5} \leq Z \leq \frac{1}{5}\right) =$$

$= P(-1 \leq Z \leq 0{,}2) = P(Z \leq 0{,}2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0{,}2) - 1 + P(Z \leq 1) =$

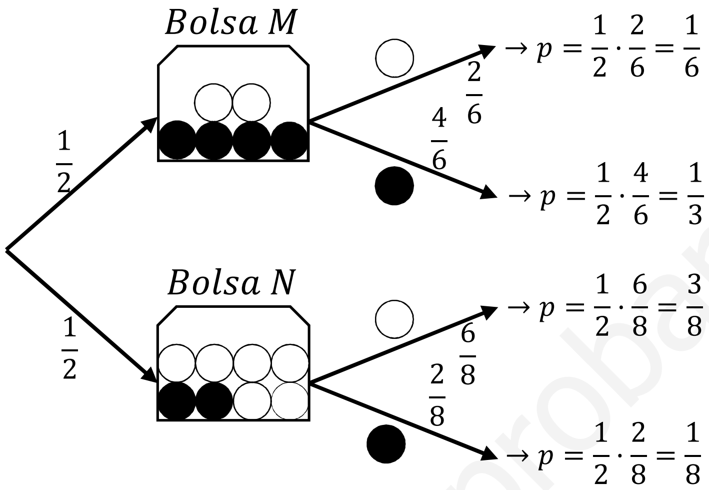
$= 0{,}5792 - 1 + 0{,}8413 = 1{,}4205 - 1 = \underline{0{,}4205}$.

****

10º) Una bolsa M contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa N contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

$a)$ Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

$b)$ Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la bolsa M.



$a)$

$$P=P(B)=P(M\cap B)+P(N\cap B)=P(M)\cdot P(B/M)+P(N)\cdot P(B/N)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{4+9}{24}=\underline{\frac{13}{24}=0{,}5417}.$$

$b)$

$$P=P(M/B)=\frac{P(M)\cdot P(B/M)}{P(M)\cdot P(B/M)+P(N)\cdot P(B/N)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{3}{8}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4+9}{24}}=\frac{24}{6\cdot 13}=$$

$$=\underline{\frac{4}{13}=0{,}3077}.$$

****