PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1º) Sea $f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$.

a) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f, en caso de que existan.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$(x+1)^2=0;\ \ x+1=0 \Rightarrow x=-1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x=-1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{(x+1)^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x\cdot(x^2-2x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^3 + 2x^2 - x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+3x^2-x}{(x+1)^2} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4} = \frac{3x^2\cdot(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = -3.$$

Las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(0, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva y negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$ es: $f'(1) = \frac{1^2\cdot(1+3)}{(1+1)^3} =$

$$= \frac{4}{8} > 0 \Rightarrow Creciente.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-3, -1) \cup (-1, 0)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(3x^2+6x)\cdot(x+1)^3+x^2(x+3)\cdot[3\cdot(x+1)^2\cdot 1]}{(x+1)^6} = \frac{(3x^2+6x)\cdot(x+1)+3x^2(x+3)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{3x^3+3x^2+6x^2+6x+3x^3+9x^2}{(x+1)^4} = \frac{6x^3+18x^2+6x}{(x+1)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x(x^2+3x+1)}{(x+1)^4}.$$

$$= \frac{6(2x^4-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ relativos.$$

$$f''(-3) = \frac{6\cdot(-3)\cdot[(-3)^2+3\cdot(-3)+1]}{(-3+1)^4} = \frac{-18\cdot(9-6+1)}{16} < 0 \Rightarrow Máx.\,para\ x = -3.$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3+1)^2} = -\frac{27}{16} \Rightarrow \underline{Máximo\!: A\left(-3, -\frac{27}{16}\right)}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x(x^2+3x+1)}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow 6x(x^2+3x+1) = 0;\ \ x = 0$. Se ha tenido en cuenta que $x^2+3x+1 \neq 0, \forall x \in R$.

$$f(0) = \frac{0^3}{(0+1)^2} = 0 \Rightarrow \underline{Punto\ de\ inflexión\!: O(0,0)}.$$

****

2º) Hallar los valores de a y b para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $P(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$y' = 3x^2 + 2ax + b.$ $\qquad\qquad y'' = 6x + 2a.$

$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0;\ \ 3x + a = 0 \Rightarrow x \Rightarrow x_0 = -\frac{a}{3}.$

Por contener al punto $P\left(-\frac{a}{3}, -1\right)$ se cumple que: $y\left(-\frac{a}{3}\right) = -1$:

$$y\left(-\frac{a}{3}\right) = -1 \Rightarrow \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + 1 = -1;$$

$$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + 2 = 0;\ -a^3 + 3a^3 - 9ab + 54 = 0;\ \ 2a^3 - 9ab + 54 = 0. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada, se cumple que $y'\left(-\frac{a}{3}\right) = 1$;

$$y'\left(-\frac{a}{3}\right) = 1 \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + b = 1;\ \ \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b = 1;$$

$$a^2 - 2a^2 + 3b = 3;\ \ -a^2 + 3b - 3 = 0;\ \ a^2 - 3b + 3 = 0. \quad (2)$$

Resolviendo es sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2a^3 - 9ab + 54 = 0 \\ a^2 - 3b + 3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a^3 - 9ab + 54 = 0 \\ -3a^3 + 9ab - 9a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a^3 - 9a + 54 = 0;$$

$a^3 + 9a - 54 = 0$. Resolviendo por la regla de Ruffini:

	1	0	9	−54
3		3	9	54
	1	3	18	0

$a^2 + 3a + 18 = 0;\ \ a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-72}}{2} \Rightarrow a \notin R$. Única solución real: $\underline{a = 3}$.

$a^2 - 3b + 3 = 0 \Rightarrow 9 - 3b + 3 = 0;\ \ 12 - 3b = 0;\ \ 4 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 4}$.

****

3º) Calcula los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x - sen\ x}$. b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

$a)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x - sen\ x} = \frac{tg\ 0 - 0}{0 - sen\ 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cos^2 x}{cos^2 x}}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen^2 x}{cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{tag^2 x}{1-\cos x} = \frac{tag^2 0}{1-\cos 0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot tg\ x\cdot\frac{1}{cos^2 x}}{sen\ x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\ x}{cos^3 x}}{sen\ x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos^3 x} = 2\cdot\frac{1}{cos^3 0} = 2\cdot\frac{1}{1} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x - x}{x - sen\ x} = 2}.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\ tipo\ nº\ e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-1+1-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-1}{4x^3-1}+\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}\cdot\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\cdot\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right]^{\frac{1-6x^2}{4x^3-1}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right]^{\frac{x^2+1-6x^4-6x^2}{4x^4-x}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^3-1}{1-6x^2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right]^{\frac{-6x^4-5x^2+1}{4x^4-x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4-5x^2+1}{4x^4-x}} = e^{-\frac{6}{4}} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{\sqrt{e}}{e^2}}.$$

****

4º) Estudia el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+az=8 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a y resuélvalo en los casos en que es compatible.

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas; para su resolución se elimina la ecuación del parámetro (segunda) y se resuelve el sistema formado por las tres ecuaciones restantes, que es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1-2-1+1-1-2=-6\neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-2-1+2-2-2-1}{-6}=\frac{-6}{-6}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{1-4-2-1-2-4}{-6}=\frac{-12}{-6}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{2-4+1+2+1+4}{-6}=\frac{6}{-6}=-1.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de x, y, z en la ecuación despreciada:

$$x+2y+az=8 \Rightarrow 1+2\cdot 2-a=8;\ \ 5-a=8 \Rightarrow a=-3.$$

$$\underline{Para\ a=-3 \Rightarrow S.C.D \Rightarrow x=1, y=2, z=-1.}$$

$$\underline{Para\ a\neq -3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

5º) Calcula, sin desarrollar, el valor del determinante: $D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$. Justifica en cada paso la propiedad de los determinantes que has utilizado.

Si a una línea de un determinante se le suma (o resta) otra línea paralela, el valor del determinante no varía.

Se va a restar la primera fila a las otras dos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b+c-c-a \\ 0 & c-b & a+b-c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix}.$$

Se va a sumar a la segunda columna la tercera:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a+b+c & c+a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & b-c \end{vmatrix}.$$

Se ha transformado el determinante de una matriz triangular inferior (que es aquella matriz que tiene todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal ceros).

El valor del determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal, por lo cual:

$D = 2 \cdot 0 \cdot (b-c) \Rightarrow \underline{D = 0}$.

****

6º) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Llamando $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$A \cdot X = B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1.$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

7º) Determina, según los valores del parámetro real a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 6x + 5y - 3z = 2$.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left. \begin{array}{r} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = 2 \end{array} \right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3a - 20 + 18 - 12 - 5a + 18 =$$

$$= -2a + 4 = 0;\ -a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} a & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 + 12 - 20 - 20 + 18 - 4 = 36 - 44 = -8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi.}$

****

8º) Estudia, según los valores del parámetro real a, la posición relativa de las siguientes rectas: $r \equiv \begin{cases} ax+3y-2z=12 \\ 2x+5y-z=6 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=5+3\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=6+4\lambda \end{cases}$.

La expresión de s por dos planos es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-6}{4}; \quad \left.\begin{array}{r} x-5=-3y+3 \\ 4x-20=3z-18 \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x+3y=8 \\ 4x-3z=2 \end{cases}.$$

Las rectas $r\ y\ s$ forman el sistema $\begin{cases} ax+3y-2z=12 \\ 2x+5y-z=6 \\ x+3y=8 \\ 4x-3z=2 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & 3 & -2 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

4º -- $Rang\ M = 3;\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$Rang\ M \Rightarrow \{F_2, F_3, F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18+12+15 = 9 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M = 3.$

$$|M'| = \begin{vmatrix} a & 3 & -2 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 3F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a-4 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ -2 & -15 & 0 & -16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-4 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \\ -2 & -15 & -16 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} a-4 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 \cdot [6(a-4) - 14 - 15(a-4) + 14] = -8 \cdot [-9(a-4)] =$$

$= 72 \cdot (a - 4) = 0 \Rightarrow a - 4 = 0; \ \ a = 4.$

$$\underline{Para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Las\ rectas\ son\ secantes.}$$

$$\underline{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ M = 3;\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cruzan.}$$

****

9º) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los casos siguientes:

a) A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.

b) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

----

a)

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

Dos sucesos son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Como es $P(A) \neq 0 \; y \; P(B) \neq 0$:

$A \; y \; B \; son \; independientes \; cuando: P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$A \; y \; B \; son \; dependientes \; cuando: P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Como quiera que $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow \underline{A \; y \; B \; no \; son \; independientes}$.

b)

Si B está incluido en A: $P(A \cap B) = P(B) \neq 0$.

Cualquiera que sea $P(B) \neq 0$, siendo $B \subset A$, se cumple que $P(A) \neq 0$ y, en consecuencia:

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \underline{A \; y \; B \; no \; son \; independientes}$.

****

10º) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

a) La probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132.

b) La probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

----

a)

$Datos:\ \mu = 120;\ \ \sigma = 12.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(120, 12).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-120}{12}$.

$$P = P(X \geq 132) = P\left(Z \geq \frac{132-120}{12}\right) = P\left(Z \geq \frac{12}{12}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

b)

$$P = P(96 \leq X \leq 144) = P\left(\frac{96-120}{12} \leq Z \leq \frac{144-120}{12}\right) = P\left(\frac{-24}{12} \leq Z \leq \frac{24}{12}\right) =$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 2)] =$$

$$= P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 2) = 2 \cdot P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 =$$

$$= 1{,}9544 - 1 = \underline{0{,}9544}.$$

****