PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones (A o B).
Contestará a las cuatro cuestiones de la opción elegida.
Puntuación de cada cuestión: máximo 10 puntos.
Se puede utilizar calculadora.
Se valorará la expresión escrita de los pasos y razonamientos realizados.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 5+2\,sen\ x & si\ \ x\le 0 \\ -x^2+ax+b & si\ \ x>0 \end{cases}$:

a) ¿Para que valores de los parámetros a y b es continua la función f(x)?
b) Determinar a y b para que f(x) sea derivable en x = 0.

----

a)

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(5+2\,sen\ x)=\underline{5} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2+ax+b)=\underline{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{b=5}}$$

La función es continua en x = 0 para b = 5 y cualquier valor real de a.

b)

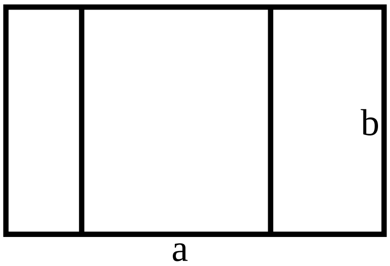
Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cos x & si\ \ x\le 0 \\ -2x+a & si\ \ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=2\cdot 1=\underline{1} \\ f'(0^+)=\underline{a} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

La función es derivable en x = 0 para a = 1 y cualquier valor real de b.

****

2º) Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?



$L = 2a + 4b = 160 \; ;; \; a + 2b = 80 \; ;; \; \underline{a = 80 - 2b}$

$S = a \cdot b \; \Rightarrow \; Máxima$

$S = (80 - 2b) \cdot b = 80b - 2b^2$

$S' = 80 - 4b = 0 \; ;; \; 20 - b = 0 \; ;; \; \underline{b = 20} \; ;; \; a = 80 - 2b = 80 - 40 = \underline{40 = a}$

$S'' = -4 < 0 \; \Rightarrow \; Máximo$

Las dimensiones que hacen el área máxima son 40 metros de base y 20 de altura.

****

3º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Discutir, en función de los valores de k, si la matriz A · B tiene inversa.

b) Discutir, en función de los valores de k, si la matriz B · A tiene inversa.

----

a)

Supongamos que A · B = M

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea inversible es que su determinante no sea nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k + k - k(2k-2) = 2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0$$

$$\underline{\underline{A \cdot B \ \ es \ \ inversible, \ \ \forall k \in R}}$$

b)

Supongamos que B · A = N

$$N = B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}.$$

$$|N| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

$$|N| = 0 \ \Rightarrow \ k^2 + 2k + 3 = 0 \ ;; \ k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \ \Rightarrow \ \underline{k \notin R}$$

$$\underline{\underline{B \cdot A \ \ no \ \ es \ \ inversible, \ \ \forall k \in R}}$$

****

4º) Discutir, según los valores de k, la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \alpha \equiv 2x+3y-4z=1 \\ \beta \equiv 4x+6y-kz=2 \\ \gamma \equiv x+y+kz=10 \end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -k \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -k & 2 \\ 1 & 1 & k & 10 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=12k-16-3k+24+2k-12k=8-k=0 \Rightarrow \underline{k=8}$$

$$Para\ k\neq 8 \Rightarrow Rango\,M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ determinado}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k\neq 8\ \ los\ \ planos\ \ son\ \ secantes\ \ en\ \ un\ \ punto}}$$

$$Para\ \ k=8\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$\left\{\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \{L_2=2L_1\} \Rightarrow Rango=2 \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix}= \rightarrow \{L_2=2L_1\} \Rightarrow Rango=2 \\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix}= \rightarrow \{L_2=2L_1\} \Rightarrow Rango=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$Para\ k=8 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2 \Rightarrow \underline{Compatible\ \ Indeterminado}$$

Para k = 8 resultan los planos: $\begin{cases} \alpha \equiv 2x+3y-4z=1 \\ \beta \equiv 4x+6y-8z=2 \\ \gamma \equiv x+y+8z=10 \end{cases}$

Como puede observarse, los planos $\alpha\ \ y\ \ \beta$ son coincidentes, por lo tanto,

<u>Para k = 8 resulta un conjunto de dos planos coincidentes y secantes al tercero</u>.

****

OPCIÓN B

1º) El precio (en miles de pesetas) de un determinado modelo de rediocasette, que se ha vendido durante 8 años, ha variado con el tiempo de acuerdo con la siguiente regla: los dos primeros años, el precio fue $P(t)=4(t^2+1)$, y los últimos 6, fue $P(t)=-2'5t+25$.

a) Representar gráficamente la función precio.

b) Decidir acerca de si es continua o no.

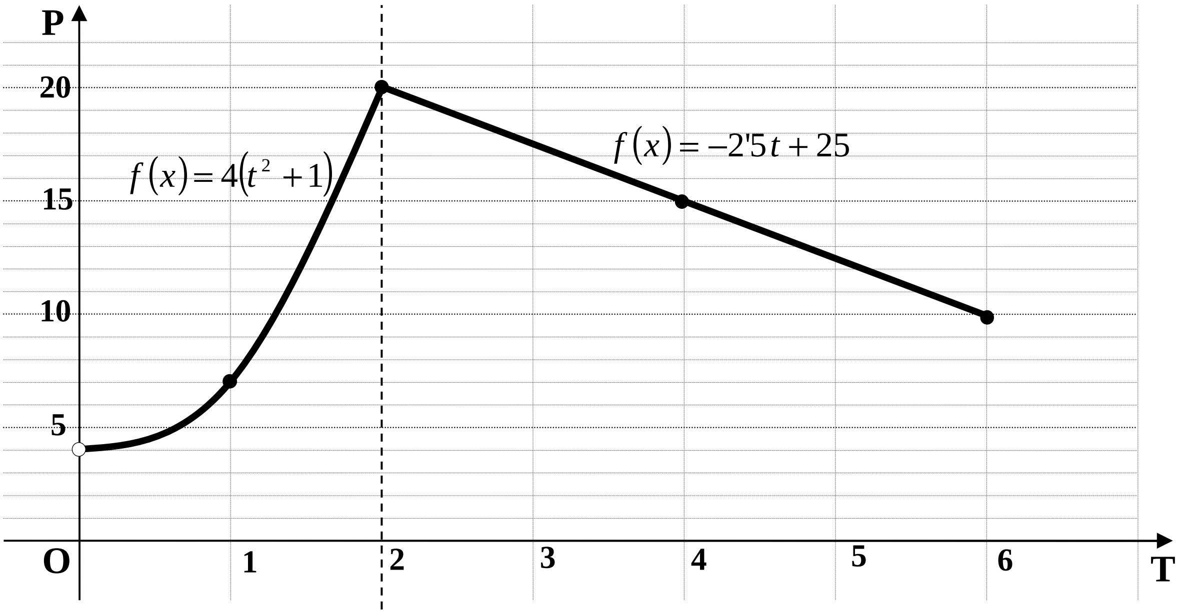
c) Calcular cuál fue el precio máximo alcanzado por el aparato. Explicar por qué no se pudo calcular mediante derivadas.

----

a)

$f(x)=4(t^2+1)$			
t	0	1	2
P(t)	4	8	20

$f(x)=-2'5t+25$			
t	2	4	6
P(t)	20	15	10



b)

Por la gráfica se ve que la función es continua, no obstante, lo vamos a demostrar:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 2^-} P(t)=\lim\limits_{t\to 2}\left[4\left(t^2+1\right)\right]=20 \\ \\ \lim\limits_{t\to 2^+} P(t)=\lim\limits_{t\to 2}\left(-2'5t+25\right)=20\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 2^-} P(t)=\lim\limits_{t\to 2^+} P(t)=P(t)=20 \Rightarrow \underline{\underline{Continua}}$$

c)

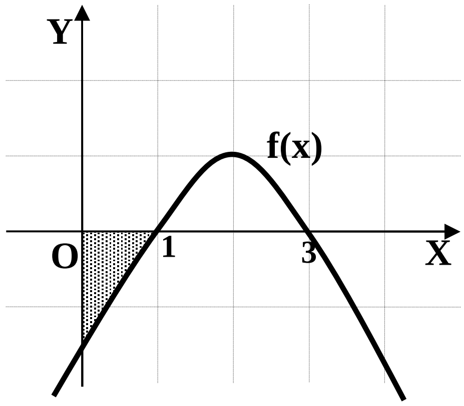
El precio máximo alcanzado por el aparato fue de 20 euros, justamente al cumplirse dos años desde su puesta en venta, como puede apreciarse claramente por la gráfica.

No se puede proceder por derivadas para determinar el máximo debido a que la función no es derivable para x = 2, como demostramos a continuación:

$$P'(t) = \begin{cases} 4 \cdot (2t) = 8t & si \quad t \leq 2 \\ \\ -2'5 & si \quad t > 2 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{cases} P'(2^-) = 8 \cdot 2 = 16 \\ \\ P'(2^+) = -2'5 \end{cases} \right\} \Rightarrow P'(2^-) \neq P'(2^+) \Rightarrow \underline{\underline{No \;\; derivable}}$$

****

2º) En la figura aparece una curva que representa a una función polinómica de grado 2. Los puntos de intersección de la curva con el eje X son A(1, 0) y B(3, 0). Además, el área limitada por la curva y los dos ejes coordenados vale 4/3. Hallar la expresión de la función polinómica.



$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(1,\ 0) \rightarrow\ f(1)=0 \Rightarrow \underline{a+b+c=0} & (1) \\ B(3,\ 0) \rightarrow\ f(1)=0 \Rightarrow \underline{9a+3b+c=0} & (2) \end{cases}$$

$$S=\int_1^0 f(x)\cdot dx=\int_1^0 \left(ax^2+bx+c\right)\cdot dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_1^0=0-\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)=$$

$$=-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c=\frac{4}{3}\ ;;\ \underline{-2a-3b-6c=8} \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ -2a-3b-6c=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} (2)-(1) \quad \Rightarrow \quad 8a+2b=0 \\ 6\cdot(1)+(3) \ \Rightarrow\ 4a+3b=8 \end{cases} \quad \left.\begin{array}{r} -4a-b=0 \\ 4a+3b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b=8\ ;;\ \underline{\underline{b=4}}$$

$$4a+b=0\ ;;\ 4a+4=0\ ;;\ \underline{\underline{a=-1}} \quad ;;\quad a+b+c=0\ ;;\ -1+4+c=0\ ;;\ \underline{\underline{c=-3}}$$

$$\underline{\underline{\textit{La función es } f(x)=-x^2+4x-3}}$$

****

3º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Calcular 3 · A · A' – 2 · I. (I es la matriz unidad de orden 2)

b) Resolver la siguiente igualdad matricial: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

Se supone que A' es la matriz traspuesta de A: $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$3 \cdot A \cdot A' - 2 \cdot I = 3 \cdot [A \cdot A'] - 2 \cdot I = 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a+c=2 \\ 3b+d=0 \\ 2c=0 \\ 2d=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{c=0}} \;;;\; \underline{\underline{d=\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a=2 \\ 3b+\frac{1}{2}=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=\frac{2}{3}}} \;;;\; \underline{\underline{b=-\frac{1}{6}}}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Se dan dos rectas definidas por las ecuaciones siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x-2z=5 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

a) Investigar si son paralelas.

b) En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que las contiene.

----

a)

En primer lugar, expresamos ambas rectas en forma de ecuaciones paramétricas:

$$r \Rightarrow \quad \underline{z=k} \ \rightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \ \rightarrow \ x=2y-1=2+2k-1 \ ;; \ \underline{x=1+2k} \\ \underline{y=1+k} \end{cases} \Rightarrow \ r \equiv \begin{cases} x=1+2k \\ y=1+k \\ z=k \end{cases}$$

$$s \Rightarrow \ \underline{z=k} \ \rightarrow \begin{cases} \underline{x=5+2k} \\ x-y-k=1 \rightarrow \ y=x-k-1=5+2k-k-1 \ ;; \ \underline{y=4+k} \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=5+2k \\ y=4+k \\ z=k \end{cases}$$

Como puede apreciarse, ambas rectas tienen como vector director $\overrightarrow{v}=(2,1,1)$, por lo tanto, <u>las rectas r y s son paralelas</u>.

b)

Para determinar el plano que contiene a los dos rectas buscamos otro vector, $\overrightarrow{w}$, que junto con $\overrightarrow{v}$ sean los vectores directores del plano.

Siendo P(1, 1, 0) un punto de r y Q(5, 4, 0) un punto de s, el vector $\overrightarrow{w}$ es el que tiene como origen P y extremo Q, o viceversa:

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(5,\ 4,\ 0)-(1,\ 1,\ 0)=(4,\ 3,\ 0).$$

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 4(y-1)+6z-4z-3(x-1)=0 \ ;;$$

$$4y-4+2z-3x+3=0$$

El plano π que contiene a las rectas r y s es: $\underline{\underline{\pi \equiv 3x-4y-2z+1=0}}$

****