

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****JUNIO - 2001**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Lea cuidadosamente las dos opciones del examen.

Elija una de ellas y conteste a las cuatro cuestiones que figuran en ella.

No conteste a cuestiones correspondientes a diferentes opciones: ello anulará el examen.

OPCIÓN A

1º) Hallar los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax + 5, & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{b}{x}, & x > 1 \end{cases}$ resulte derivable para todos los valores de x .

Es evidente que la función $f(x)$ es continua en todo su dominio que es $R - \{0\}$, excepto para $x = 1$, que es dudoso.

Para que una función sea continua en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo tanto para que sea derivable para $x = 1$, primero tiene que ser continua:

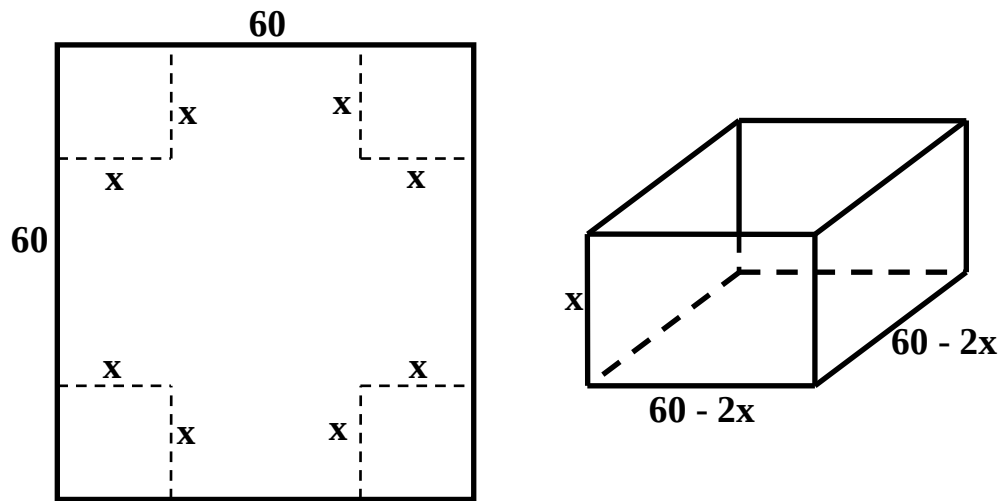
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 5) = \underline{a + 5} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(a\sqrt{x} + \frac{b}{x} \right) = \underline{a + b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 5 = a + b \Rightarrow \underline{\underline{b = 5}}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5, & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{5}{x}, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ \frac{a}{2} - 5, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{2} - 5 \;; \; 2a = a - 10 \;; \; \underline{\underline{a = -10}}$$

2º) A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm. Decidir si la observación es correcta o no.



Sea x el valor del lado del cuadrado recortado de cada una de las esquinas de la cartulina.

El volumen de la caja resultante es: $V = (60 - 2x)^2 \cdot x$.

Para que el volumen sea máximo su derivada tiene que ser nula:

$$V' = [2(60 - 2x) \cdot (-2)] \cdot x + (60 - 2x)^2 \cdot 1 = (60 - 2x)(-4x + 60 - 2x) = (60 - 2x)(60 - 6x) =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot (30 - x)(10 - x) = \underline{\underline{12(30 - x)(10 - x) = V'}}$$

$$V' = 0 \Rightarrow 12(30 - x)(10 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 30} \\ \underline{x_2 = 10} \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas, es lógico que la primera carece de sentido, pues si la longitud del trozo recortado de cada esquina fuera de 30 cms, se dividiría la cartulina en cuatro trozos sin posibilidad de construir la caja (sería volumen mínimo); por el contrario, el valor de $x = 10$ si tiene sentido, y en efecto, es la solución.

La observación es correcta.

3º) Discutir y resolver el siguiente sistema de acuerdo con los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + m^2 z = m - 1 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 15m^2 - 4 + 16 - 24 + 5 - 8m^2 = 7m^2 - 7 = 7(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible determinado}}$$

$$\text{Para } m = 1 \text{ resulta el sistema homogéneo: } \begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo siempre es compatible, ya que, al menos, admita la solución trivial $x = 0, y = 0, z = 0$.

Además, las matrices de coeficientes y ampliada es la misma, por lo tanto sus rangos son siempre iguales.

En el caso que nos ocupa, el rango de la matriz de coeficientes es 2, por lo cual:

$$\text{Para } m = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible Indeterminado}}$$

Para $m = -1$ el rango de M' es:

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 16 = -14 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } m = -1 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \underline{\text{Incompatible}}$$

Ahora vamos a resolver el sistema en los casos posibles.

Para $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$: Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ m-1 & -1 & m^2 \end{vmatrix}}{7(m^2-1)} = \frac{4(m-1)-6(m-1)}{7(m^2-1)} = \frac{-2(m-1)}{7(m^2-1)} = \frac{-2}{7(m+1)} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & m-1 & m^2 \end{vmatrix}}{7(m^2-1)} = \frac{4(m-1)-5(m-1)}{7(m^2-1)} = \frac{-(m-1)}{7(m^2-1)} = \frac{-1}{7(m+1)} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & m-1 \end{vmatrix}}{7(m^2-1)} = \frac{15(m-1)-8(m-1)}{7(m^2-1)} = \frac{7(m-1)}{7(m^2-1)} = \frac{1}{m+1} = z$$

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 2z = 0 \\ \text{Para } m = 1: \quad 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y = 0 \end{array} \right\}$$

Parametrizando $z \rightarrow k$ y despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera. Para que el sistema tenga otras infinitas soluciones, además de la solución trivial, es necesario que se satisfaga la ecuación despreciada:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = -k \\ 4x - y = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = -k \\ 12x - 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 14x = -k \;; \; x = -\frac{1}{14}k \;; \; y = 4x = -\frac{2}{7}k = y$$

Sustituyendo en la ecuación despreciada, resulta:

$$5x + 4y + 2z = 0 \Rightarrow -\frac{5}{14}k - \frac{4}{14}k + 2k = 0 \;; \; -9k + 14k = 0 \;; \; \underline{k = 0}$$

Para $m = 1$ la única solución del sistema es $x = 0, y = 0, z = 0$.

4º) Comprobar si los puntos A(1, 2, 3), B(1, -2, 4) y C(1, -3, 5) están alineados. En caso negativo, determinar la ecuación del único plano que los contiene.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -2, 4) - (1, 2, 3) = (0, -4, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (1, -3, 5) - (1, -2, 4) = (0, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u} \text{ y } \vec{v} \Rightarrow L. \text{ independientes}}}}$$

Los puntos A, B y C no están alineados

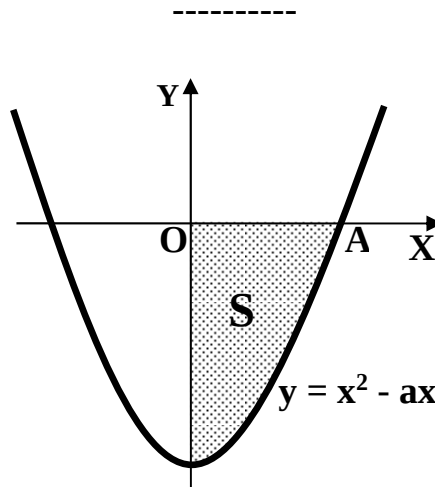
El plano π que los contiene es que tiene como vectores directores a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y contiene a cualquiera de los puntos dados, por ejemplo A:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad -4(x-1) + (x-1) = 0 \quad ; \quad -3(x-1) = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-1=0}}$$

OPCIÓN B

1º) Hallar el valor del parámetro a sabiendo que el área limitada por la gráfica de la parábola $y = x^2 - ax$ y el eje OX es $\frac{32}{3}$.



Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son el origen y el punto $A(a, 0)$.

Por ser $y' = 2x - a$; $y'' = 2 > 0$, la parábola presenta un mínimo, lo cual hace que todas las ordenadas del área a calcular son negativas, por ello, cambiaremos los límites de integración:

$$S = \int_a^0 (x^2 - ax) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^0 = 0 - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a \cdot a^2}{2} \right) = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{3a^3 - 2a^3}{6} = \frac{a^3}{6} = S$$

Como el valor del área tiene que ser $\frac{32}{3}$, será:

$$\frac{a^3}{6} = \frac{32}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$$

El valor de a es: $a = 2 \cdot \sqrt[3]{4} \cong 3.12$ unidades

2º) Trazar la gráfica de una función $f(x)$ que satisfice las siguientes propiedades:

a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) $f(0) = 0$.

c) No contiene ni máximos ni mínimos.

d) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 5$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} \infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} -\infty$

e) Tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

Por a) sabemos que se trata de una función racional cuyo denominador contiene al factor $(x + 1)$, por lo tanto tiene una asíntota vertical para $x = -1$.

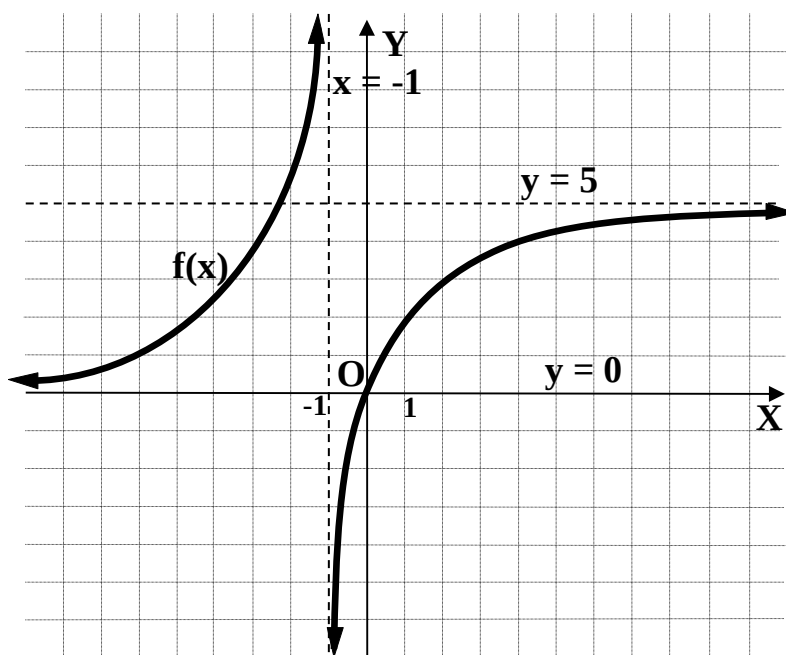
Por la condición b) sabemos que en el numerador figura el factor x .

Por la condición c) sabemos varias cosas:

1ª.- Por ser el límite cuando $x \rightarrow \pm\infty$ números finitos, los grados del numerador y denominador son iguales.

2ª.- Tiene dos asíntotas horizontales: $y = 5$ e $y = 0$, con las tendencias que se indican.

3ª.- Que al no tener máximos ni mínimos, las tendencias cuando $x \rightarrow 1$, por la derecha y por la izquierda facilitan la construcción de la función.



Por la condición d) sabemos que se trata de una función definida a trozos, de tal forma que para $x = 1$ los límites laterales sean iguales y, sin embargo, no coincidan con el valor de la función para $x = 1$.

Con todos estos razonamientos podemos representar, aproximadamente la función, cuya gráfica es la indicada en la figura.

3º) En este ejercicio A y B son dos matrices desconocidas que hay que hallar. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Multiplicando por -2 los dos términos de la primera ecuación y sumando queda:

$$\left. \begin{aligned} -4A - 2B &= \begin{pmatrix} -10 & -24 & -14 \\ -8 & -4 & -14 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -14 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}}}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 28 \\ -24 & -12 & -42 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} ;; B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 28 \\ -24 & -12 & -42 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -28 \\ 24 & 12 & 42 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix} = B}}$$

4º) En el caso de que las dos rectas siguientes se corten en un punto, hallar las coordenadas del mismo:

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 4\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases} \quad ; ; \quad s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2}$$

Dos vectores directores de las rectas r y s son, respectivamente, $\vec{u} = (4, -1, 0)$ y $\vec{v} = (2, -3, -2)$. Un punto de r es A(-7, 1, 2) y un punto de s es B(3, -4, 0).

Siendo $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, -4, 0) - (-7, 1, 2) = (10, -5, -2)$.

Las rectas r y s se cortan en un punto si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes; en caso contrario se cruzan. Es decir: si el rango es 2 se cortan y determinan un plano; si el rango es 3, se cruzan y no determinan ningún plano.

$$\text{Rango} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 2 - 8 + 4 = -26 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango} = 3}$$

Las rectas se cruzan, por lo tanto no tienen ningún punto de corte.
