PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Cada uno de los cuatro ejercicios elegidos puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCION A

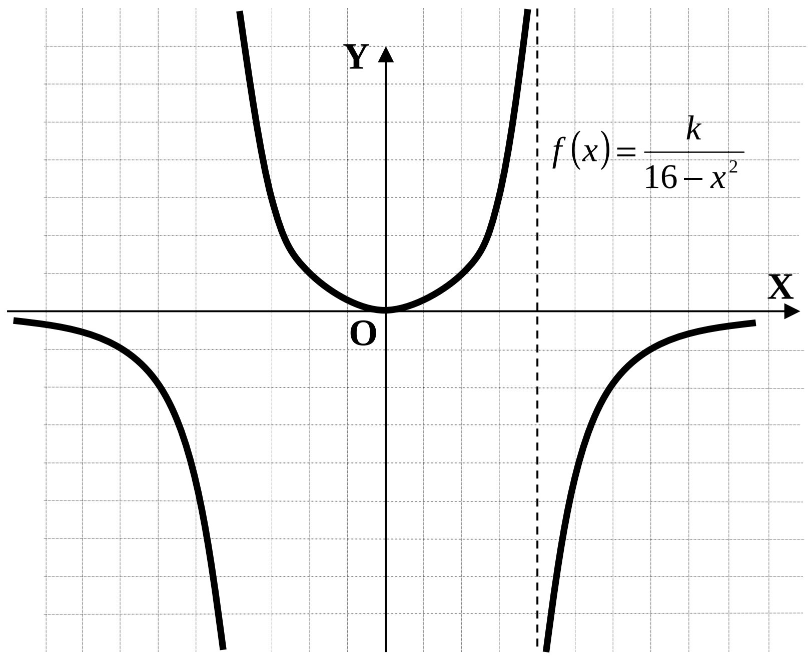
1º) Se pide trazar razonadamente la gráfica de una cierta función f(x) sabiendo que tiene las siguientes propiedades:
a) Está definida para todo valor de x, excepto para x = -4 y x = 4.
b) Es decreciente cuando x < 0 y creciente cuando x > 0.
c) La gráfica pedida es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

----

a) La función pedida, f(x) tiene que ser de la forma: $f(x)=\frac{k}{16-x^2}$, siendo k un valor real mayor que cero, cuyo dominio es el pedido y es simétrica con respecto al eje Y, o sea, es una función par.

b) $f'(x)=\frac{2kx}{\left(16-x^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)>0,\ \forall x>0 \\ f'(x)<0,\ \forall x<0 \end{cases} \Rightarrow x\in R-\{4,-4\}$

c)



****

2º) Calcular la primitiva siguiente: $\int L\left(25+x^2\right)\cdot dx.$

Esta integral indefinida debe resolverse, en principio, por el método “por partes”, cuya fórmula es la siguiente:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int L\left(25+x^2\right)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} L\left(25+x^2\right)=u \;\rightarrow\; du=\dfrac{2x}{25+x^2}\cdot dx \\ dv=dx \;\rightarrow\; v=x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int L\left(25+x^2\right)\cdot dx = L\left(25+x^2\right)\cdot x - \int x\cdot\frac{2x}{25+x^2}\cdot dx = x\cdot L\left(25+x^2\right) - \int\frac{2x^2}{25+x^2}\cdot dx =$$

$$= x\cdot L\left(25+x^2\right) - A \qquad (*)$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 & x^2+25 \\ \hline -2x^2-50 & 2 \\ \hline \quad -50 & \end{array}$$

$$A=\int\left(2-\frac{50}{x^2+25}\right)\cdot dx = 2\int dx - \int\frac{50}{x^2+25}\cdot dx =$$

$$=2x-2\int\frac{dx}{\frac{x^2}{25}+1} = 2x-2\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{5}=t \\ dx=5\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-2\int\frac{5\,dt}{t^2+1} = 2x-10\,arc\ tag\ t+C=$$

$$=\underline{2x-10\,arc\ tag\,\frac{x}{5}+C=A}$$

Sustituyendo en (*) el valor de A, queda:

$$\underline{\underline{\int L\left(25+x^2\right)\cdot dx = x\cdot L\left(x^2+25\right)-2x+10\,arco\ tag\,\frac{x}{5}+C}}$$

****

3º) En este ejercicio los números x, y, z, u son todos distintos de cero. Justificar, sin efectuar su desarrollo que el determinante siguiente vale 0.

$$\begin{vmatrix} \frac{yz}{u} & \frac{xz}{u} & \frac{xy}{u} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$$

Multiplicando la tercera fila por xyz queda:

$$\begin{vmatrix} \frac{yz}{u} & \frac{xz}{u} & \frac{xy}{u} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} \frac{yz}{u} & \frac{xz}{u} & \frac{xy}{u} \\ \frac{xyz}{x} & \frac{xyz}{y} & \frac{xyz}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \cdot \begin{vmatrix} \frac{yz}{u} & \frac{xz}{u} & \frac{xy}{u} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \cdot 0 = 0, \ \underline{\underline{c.q.j.}}$$

El último determinante es cero por tener dos filas iguales.

****

4º) Se sospecha que el plano π definido por el punto A(1, 0, 5) y los vectores $\overrightarrow{u}=(3,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,\ 3,\ -2)$ se cortan en un punto con la recta, dada en su forma continua, $r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-7}{10}=\frac{z-2}{-5}$. Decidir razonadamente la cuestión.

La ecuación vectorial del plano dado es:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x-1)-y-9(z-5)+(z-5)-3(x-1)-6y=0\ ;;$$

$$-5(x-1)-7y-8(z-5)=0\ ;;\ 5(x-1)+7y+8(z-5)=0\ ;;\ 5x-5+7y+8z-40=0$$

$$\underline{\pi\equiv 5x+7y+8z-45=0}$$

La expresión de ecuaciones paramétricas de la recta es: $r\equiv\begin{cases} x=3k+2 \\ y=10k+7 \\ z=-5k+2 \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en el plano, resulta:

$$\pi\equiv 5(3k+2)+7(10k+7)+8(-5k+2)-45=0$$

$$15k+10+70k+49-40k+16-45=0\ ;;\ 45k=-30\ ;;\ 3k=-2\ ;;\ \underline{k=-\frac{2}{3}}$$

Sustituyendo ahora el valor de k en la recta, resulta el punto pedido:

$$\begin{cases} x=3k+2 \\ y=10k+7 \\ z=-5k+2 \end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2+2=\underline{0=x} \\ y=10\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+7=-\frac{20}{3}+7=\underline{\frac{1}{3}=y} \\ z=-5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2=\frac{10}{3}+2=\underline{\frac{16}{3}=z} \end{array}\right\}\Rightarrow\underline{\underline{P\left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{16}{3}\right)}}$$

<u>En efecto, se cortan en el punto P</u>

****

OPCIÓN B

1º) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente sea continua en todos sus puntos.

$$f(x)=\begin{cases} ax-b & si \quad x<-1 \\ ax^2-bx+3 & si \quad -1\le x\le 2 \\ -bx^3+a & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(ax-b)=\underline{-a-b} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(ax^2-bx+3)=\underline{a+b+3} \end{array}\right\} \Rightarrow -a-b=a+b+3\ ;;\ \underline{2a+2b=-3} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(ax^2-bx+3)=\underline{4a-2b+3} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-bx^3+a)=\underline{a-8b} \end{array}\right\} \Rightarrow 4a-2b+3=a-8b\ ;;\ \underline{a+2b=-1} \quad (2)$$

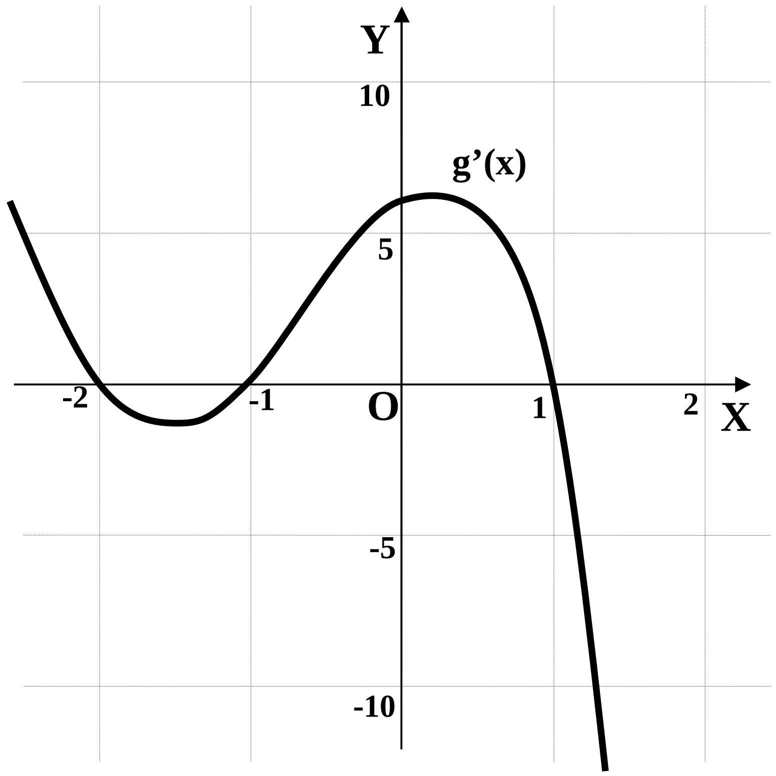
Resolviendo el sistema formado por (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2a+2b=-3 \\ a+2b=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2a+2b=-3 \\ -a-2b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=-2}}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a+2b=-3 \\ a+2b=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2a-2b=3 \\ 2a+4b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b=1\ ;;\ \underline{\underline{b=\frac{1}{2}}}$$

****

2º) La gráfica que aparece en la figura representa la derivada de cierta función g(x).



Describir a partir de ella los intervalos de concavidad y convexidad de g(x), así como sus puntos de inflexión y máximos y mínimos.

Los valores en que g'(x) pasa de ser creciente a decreciente o viceversa, son aproximadamente, los valores de x: $x_1 = -\frac{3}{2}\ y\ x_2 = \frac{1}{2}$.

$$g'(x) \Rightarrow Creciente \Rightarrow \underline{\underline{\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right) \Rightarrow g''(x) > 0 \Rightarrow (\cup) \Rightarrow CONVEXA}}$$

$$g'(x) \Rightarrow Decreciente \Rightarrow \underline{\underline{\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\ \infty\right) \Rightarrow g''(x) < 0 \Rightarrow (\cap) \Rightarrow CÓNCAVA}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow g'(x) \Rightarrow Decreciente \Rightarrow g''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máx[-2,\ g(-2)]}} \\ x = -1 \rightarrow g'(x) \Rightarrow Creciente \Rightarrow g''(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín[-1,\ g(-1)]}} \\ x = 1 \rightarrow g'(x) \Rightarrow Decreciente \Rightarrow g''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máx[1,\ g(1)]}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Decreciente \Rightarrow g''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máx[-2,\ g(-2)]}}$$

$$g''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \cong -\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P.\ I.\left[-\dfrac{3}{2},\ g\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right]}} \\ \\ x \cong \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P.\ I.\left[\dfrac{1}{2},\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]}} \end{cases}$$

****

3º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales que viene a continuación según los valores del parámetro p:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+py=0 \\ x+pz=p \\ x+y+3z=5 \end{array}\right\}$$

Hallar para que caso de p es compatible e indeterminado y resolverlo en ese caso.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & p & 0 \\ 1 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 2 & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & p \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & p & 0 \\ 1 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=p^2-2p-3p=p^2-6p=p(p-6)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} p_1=0 \\ p_2=6 \end{cases}$$

$$Para \left\{\begin{array}{l} p\neq 0 \\ p\neq 6 \end{array}\right\} \Rightarrow\ Rango\, M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incógnitas\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Compatible\ \ \det er\min ado}}$$

$$Para\ \ p=0\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$\left\{\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow\ Rango=2 \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow\ Rango=2 \\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow\ Rango=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{Rango\ M'=2}$$

$$Para\ \ p=0\ \Rightarrow\ Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ incógnitas\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

$$Para\ \ p=6\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=36-12-30=-6\neq 0 \Rightarrow\ Rango=3$$

$$Para\ \ p=6\ \Rightarrow\ Rango\ M \neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Incompatible}}$$

Para p = 0 resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x = 0 \\ x = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$, equivalente a: $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$.

Las infinitas soluciones se obtienen parametrizando una de las variable, por ejemplo, z:

$$x + y + 3z = 5 \;\;;;\;\; \underline{z = k} \;\; \rightarrow y + 3k = 5 \;\;;;\;\; \underline{y = 5 - 3k} \;\;;;\;\; \underline{x = 0}$$

Dando valores a k se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{k = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{k = 1 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{k = -2 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 11 \\ z = -2 \end{cases}}} \;\; \cdots\cdots\cdots\cdot$$

****

4º) Hallar la ecuación cartesiana de un plano que pasa por el punto P(3, 0, 3) y contiene a la recta r cuyas ecuaciones son: $r \equiv \frac{x}{-2} = y+1 = \frac{z-3}{3}$.

La expresión en ecuaciones paramétricas de la recta r es: $r \equiv \begin{cases} x = -2k \\ y = -1 + k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$

Un vector director de la recta r es: $\overrightarrow{u} = (-2,\ 1,\ 3)$. Un punto de r es: Q(0, -1, 3).

Siendo $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,\ -1,\ 3) - (3,\ 0,\ 3) = (-3,\ -1,\ 0)$, el plano pedido, π, es el que tiene como vectores directores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}$ y pasa por el punto P:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 2(z-3) - 9y + 3(z-3) + 3(x-3) = 0\ \ ;;$$

$$2z - 6 - 9y + 3z - 9 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 3x - 9y + 5z - 25 = 0}}$$

****