PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si \;\; x<0 \\ x-a & si \;\; 0\le x<1 \\ \frac{a}{x}+b & si \;\; 1\le x \end{cases}$$

Los puntos críticos son para x = 0 y para x = 1:

Para que una función sea continua en un punto tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(ax^2+b\right)=\underline{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-a)=\underline{-a}=\underline{f(0)} \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; b=-a \;\;;;\;\; \underline{a+b=0} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-a)=\underline{1-a} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{a}+b\right)=\underline{\frac{1}{a}+b}=\underline{f(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \underline{1-a=\frac{1}{a}+b} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema que forman las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 1-a=\frac{1}{a}+b \end{array}\right\} \to b=-a \;\; \Rightarrow 1-a=\frac{1}{a}-a \;\;;;\;\; 1=\frac{1}{a} \;\;;;\;\; \underline{\underline{a=1}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{b=-1}}$$

****

2º) a) Dibujar el recinto limitado por las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ y $g(x) = x + 3$.
b) Hallar su área.

----

a)

Los puntos de corte de las dos funciones con el eje de abscisas son:

$$f(x) = y = 0 \Rightarrow -x^2 + 5 = 0 \;;\; x^2 = 5 \;;\; x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \underline{A(\sqrt{5},\ 0)} \;;\; \underline{B(-\sqrt{5},\ 0)}$$

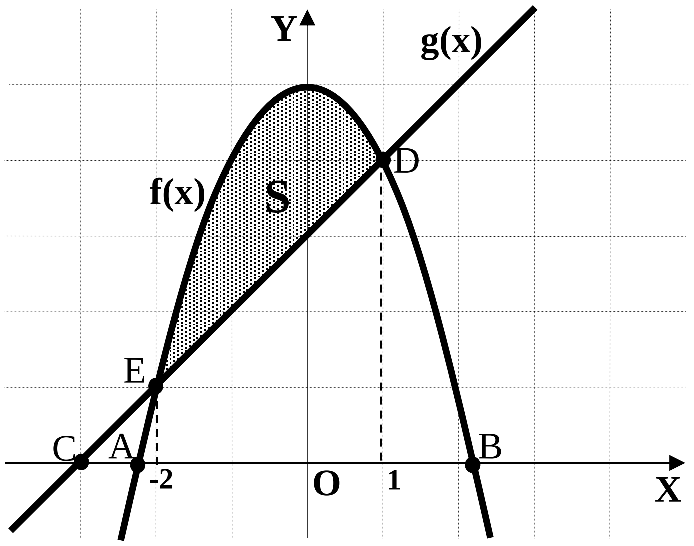
$$g(x) = x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \;;\; \underline{C(-3,\ 0)}$$

Los puntos de corte de las funciones son:

$$f(x) = g(x) \;;\; -x^2 + 5 = x + 3 \;;\; x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 1} \rightarrow \underline{y_1 = 4} \Rightarrow \underline{D(1,\ 4)} \\ \underline{x_2 = -2} \rightarrow \underline{y_2 = 1} \Rightarrow \underline{E(-2,\ 1)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



b)

El valor del área encerrado entre ambas funciones es, teniendo en cuenta que en el recinto, todas las ordenadas de f(x) son iguales o mayores que las de g(x):

$$S = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 + 5 - x - 3\right) \cdot dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(+\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4'5\ u^2 = S}}$$

****

3º) Discutir y resolver según los valores del parámetro m: $\begin{cases} 2x - y + z = m^2 \\ -x + 2y = 0 \\ mx - y + z = 1 \end{cases}$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m^2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ m & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2m - 1 = 4 - 2m = 2(2-m) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{m = 2}$$

$$Para\ m \neq 2 \Rightarrow Rango\, M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incógnitas \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Compatible\ \det er \min ado}}$$

$$Para\ \ m = 2\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 16 - 1 = 8 - 17 = -9 \neq 0 \Rightarrow Rango\ \ M' = 3$$

$$Para\ m = 2 \;\Rightarrow\; Rango\, M \neq Rango\ M' \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Incompatible}}$$

Resolvemos para $m \neq 2$. Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2(2-m)} = \frac{2m^2 - 2}{2(2-m)} = \frac{2(m^2-1)}{2(2-m)} = \underline{\underline{\frac{m^2-1}{2-m} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m^2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2(2-m)} = \frac{-1 + m^2}{2(2-m)} = \underline{\underline{\frac{m^2-1}{2(2-m)} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & m^2 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2(2-m)} = \frac{4 + m^2 - 2m^3 - 1}{2(2-m)} = \underline{\underline{\frac{2m^3 - m^2 - 3}{2(m-2)} = z}}$$

****

4º) a) ¿Están alineados los puntos A(1, 0, -1), B(-1, 1, 2) y C(3, 0, 1? Justificar la respuesta.

b) En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1,\ 2) - (1,\ 0,\ -1) = \underline{(-2,\ 1,\ 3)} \\ \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ -1) = \underline{(2,\ 0,\ 2)}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{-2}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{3}{2}}}$$

Los puntos A, B y C no están alineados.

b)

El plano π viene determinado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y cualquiera de los puntos, por ejemplo A:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2(x-1) + 6y - 2(z+1) + 4y = 0 \ ;;$$

$$2x - 2 + 10y - 2z - 2 = 0 \ ;;\ 2x + 10y - 2z - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + 5y - z - 2 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Representar gráficamente una función que significa las siguientes condiciones:

a) f(0) = 0; f'(0) = 0

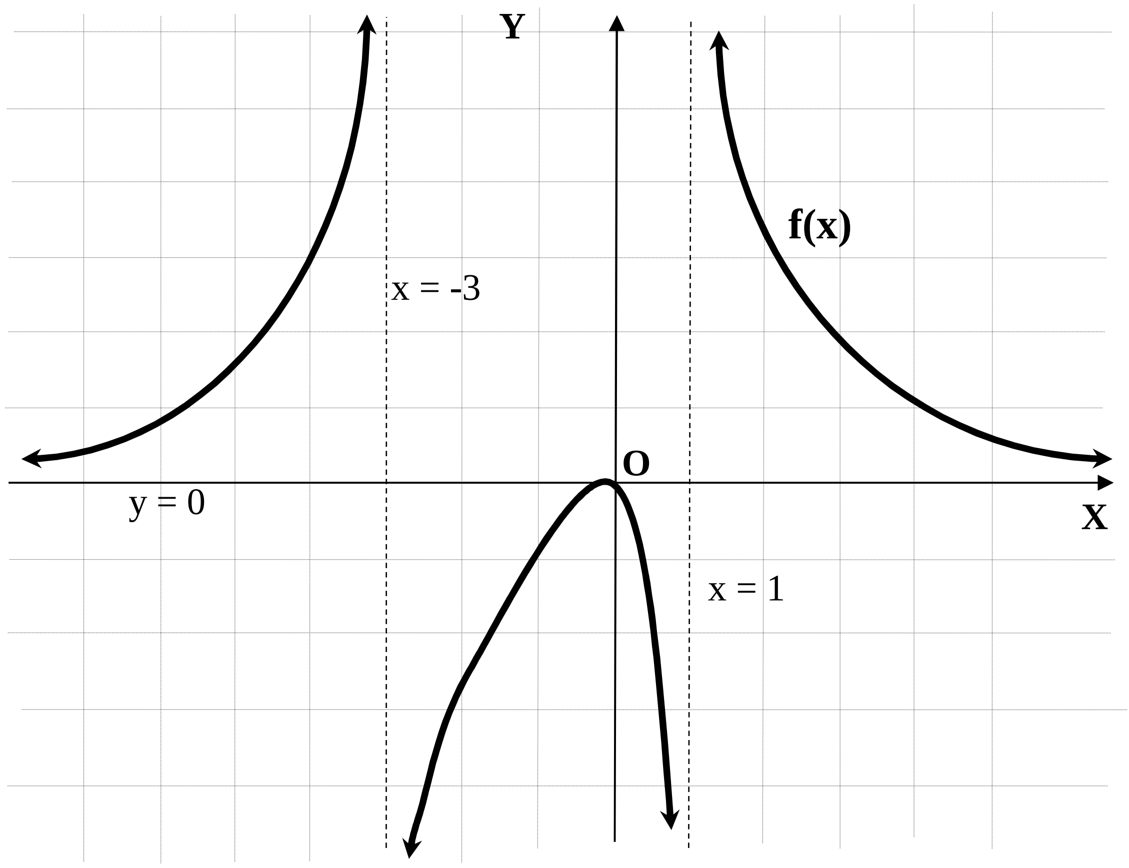
b) Asíntota vertical la recta x = -3.

c) Creciente en $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 0)$.

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

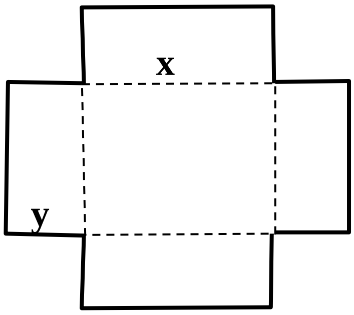
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

f) Decreciente en $(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.



****

2º) Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 50 m^3 de volumen, que tenga superficie mínima.



$$V = x^2 \cdot y = 50 \;\;;;\;\; \underline{y = \frac{50}{x^2}}$$

$$S = x^2 + 4 \cdot x \cdot y \Rightarrow \textit{Mínimo.} \quad \textit{Sustituyendo el valor de } y:$$

$$S = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{50}{x^2} = x^2 + \frac{200}{x} = \underline{\frac{x^3 + 200}{x} = S}$$

$$S' = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3 + 200\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 200}{x^2} = \underline{\frac{2x^3 - 200}{x^2} = S'}$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 200}{x^2} = 0 \;\;;;\;\; 2x^3 - 200 = 0 \;\;;;\;\; x^3 - 100 = 0 \;\;;;\;\; x^3 = 100 \;\;;;\;\; \underline{x = \sqrt[3]{100}\ cm}$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$S'' = \frac{6x^2 \cdot x^2 - \left(2x^3 - 200\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{6x^3 - 4x^3 + 400}{x^3} = \underline{\frac{2x^3 + 400}{x^3} = S''}$$

$$S''_{\left(\sqrt[3]{100}\right)} = \frac{2 \cdot 100 + 400}{100} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mínimo, c.q.j.}}}$$

$$y = \frac{50}{x^2} = \frac{50}{\left(\sqrt[3]{100}\right)^2} = \frac{50}{\left(\sqrt[3]{10^2}\right)^2} = \frac{50}{\sqrt[3]{10^4}} = \frac{50}{10 \cdot \sqrt[3]{10}} = \frac{5}{\sqrt[3]{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{10}}{10} = \underline{2\sqrt[3]{100} = 2x = y}$$

$$x = \sqrt[3]{100} \cong \underline{4'64\ \ m = x} \;\;;;\;\; y = 2x = 2 \cdot 4'64 = \underline{9'28\ \ m = y}$$

<u>Las dimensiones aproximadas del depósito son 4’64 m de lado de la base y 9’28 m de altura.</u>

****

3º) a) Determinar para que valor de m tiene inversa la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calcular la matriz inversa para ese valor de m.

----

a)

Para que una matriz sea inversible es necesario que su determinante sea distinto de cero:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1-2m-m^2=0 \;\;;;\;\; -(m+1)^2=0 \;\;;;\;\; \underline{\underline{m=-1}}$$

$$\underline{\underline{M \;\; es \;\; inversible \;\; \forall m \in R, \;\; m \neq -1.}}$$

b)

$$M^T=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \;\;;;\;\; Adj\left(M^T\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -m & -2m \\ -m+2 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1-m^2 \end{pmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{M^{-1}=\frac{-1}{(m+1)^2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -m & -2m \\ -m-2 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1-m^2 \end{pmatrix}, \;\; \forall m \neq -1}}$$

****

4º) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto A(0, -2, 4) y a la recta r cuyas ecuaciones son: $r \equiv \frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z+2}{-2}$.

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ -2)$ y un punto de la recta r puede ser P(-1, 3, -2).

El vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP} = P - A = (-1,\ 3,\ -2) - (0,\ -2,\ 4) = (-1,\ 5,\ -6)$ también es director del plano π pedido, por lo cual es:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;;$$

$$-6x + 2(y+2) + 10(z-4) + (z-4) + 10x + 12(y+2) = 0 \ \ ;; \ \ 4x + 14(y+2) + 11(z-4) = 0 \ \ ;;$$

$$4x + 14y + 28 + 11z - 44 = 0 \ \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x + 14y + 11z - 16 = 0}}$$

****