PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2006

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) Sea la función real de variable real $f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^2 & si \;\; x\le 2 \\ \frac{36}{2+x} & si \;\; x>2\end{cases}$:

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

b) Razonar si la función es derivable en toda la recta real.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 2, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 2 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(1-x^2)^2 = f(2)=(1-4)^2=\underline{9} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{36}{2+x}=\frac{36}{2+2}=\underline{9}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)} \Rightarrow \underline{La \;\; función \;\; es \;\; continua \;\; para \;\; x=2}$$

<u>La función es continua en toda la recta real.</u>

b)

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 2, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 2 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cdot\left(1-x^2\right)\cdot(-2x)=4x\left(x^2-1\right) & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{-36}{(2+x)^2} & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$f'(2)=\begin{cases} 4\cdot 2\cdot\left(2^2-1\right)=8\cdot 3=24 & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{-36}{(2+2)^2}=\dfrac{-36}{16}=-\dfrac{9}{4} & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'\left(2^-\right)\neq f\left(2^+\right)}$$

<u>La función no es derivable en x = 2.</u>

****

2º) El consumo de un barco navegando a una velocidad de x nudos (millas/hora) viene dada por la expresión $C(x)=\frac{x^2}{60}+\frac{450}{x}$. Calcula la velocidad más económica y el coste equivalente.

La condición necesaria para que el coste sea es que su derivada sea cero:

La expresión del coste puede ponerse de la forma: $C(x)=\frac{x^2}{60}+\frac{450}{x}=\frac{x^3+27.000}{60x}$.

$$C'(x)=\frac{3x^2\cdot(60x)-\left(x^3+27.000\right)\cdot 60}{3600x^2}=\frac{3x^3-\left(x^3+27.000\right)}{60x^2}=\frac{2x^3-27.000}{60x^2}=\underline{\frac{x^3-13.500}{30x^2}}$$

$$C'(x)=0\Rightarrow\frac{x^3-13.500}{30x^2}=0\ \ ;;\ \ x^3-13.500=0\ \ ;;\ \ x^3=13.500\ \ ;;\ \ x=\sqrt[3]{13.500}=\underline{23'81=x}$$

<u>La velocidad más económica es para 23’81 nudos.</u>

El coste más económico es el siguiente:

$$C(28'81)=\frac{\left(\sqrt[3]{13.500}\right)^3+27.000}{60\cdot 23'81}=\frac{13.500+27.000}{1.428'66}=\frac{40.500}{1.428'66}=28'3482$$

<u>El coste mínimo es de 28’3482 unidades económicas.</u>

****

3º) Discutir y resolver el sistema $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 4x+y-3z=-5 \\ 3x-y+mz=m-1 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & m & m-1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix}=m-4+18-3-3+8m=9m+8=0 \;;;\; \underline{m=-\frac{8}{9}}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m\neq -\frac{8}{9} \Rightarrow Rang \;\; M=Rang \;\; M'=3=n^{o} \;\; incóg \Rightarrow S. \;\; Compatible \;\; Deter\min ado}}$$

$$Para \;\; m=-\frac{8}{9} \;\; es \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}, \text{ cuyo rango es el siguiente:}$$

$$Rang \;\; M' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{9} \end{vmatrix}=-\frac{1}{9}+30-5-\frac{8}{9}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rang \;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m=-\frac{8}{9} \Rightarrow Rang \;\; M\neq Rang \;\; M' \Rightarrow S. \;\; Incompatible}}$$

Resolviendo por la Regla de Cramer para $m\neq -\frac{8}{9}$:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \\ m-1 & -1 & m \end{vmatrix}}{9m+8}=\frac{5+6m-6-m+1-10m}{9m+8}=\underline{\underline{\frac{-5m}{9m+8}}}=x$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & -5 & -3\\ 3 & m-1 & m\end{vmatrix}}{9m+8}=\frac{-5m+4m-4+15+3m-3}{9m+8}=\frac{2m+8}{9m+8}=\underline{\underline{\frac{2(m+4)}{9m+8}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 1 & -5\\ 3 & -1 & m-1\end{vmatrix}}{9m+8}=\frac{m-1+30-5+8m-8}{9m+8}=\underline{\underline{\frac{9m+16}{9m+8}=z}}$$

****

4º) a) Halla la ecuación del plano determinado por los puntos $A(1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 0,\ 1)$ y $C(1,\ 4,\ 3)$.

b) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en caso de que se corten.

----

a)

Los puntos $A(1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 0,\ 1)$ y $C(1,\ 4,\ 3)$ determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ 1) - (1,\ 3,\ 2) = (1,\ -3,\ -1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 4,\ 3) - (1,\ 3,\ 2) = (0,\ 1,\ 1)$$

El plano π que contiene a los tres puntos puede obtenerse por uno cualquiera de ellos, por ejemplo A, y los dos vectores obtenidos

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -3x + 3 + z - 2 + x - 1 - y + 3 = 0 \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0}}$$

b)

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 1,\ 2)$ y un vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1)$, que como puede apreciarse son linealmente independientes y, además, no son perpendiculares por ser $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (3,\ 1,\ 2) \cdot (2,\ 1,\ -1) = 6 + 1 - 2 \neq 0$.

<u>La recta y el plano son secantes.</u>

El punto Q de corte se obtiene de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-1 + 3\lambda) + (2 + \lambda) - (2\lambda) - 3 = 0 \ ;;\ -2 + 6\lambda + 2 + \lambda - 2\lambda - 3 = 0$$

$$5\lambda - 3 = 0 \;\;;;\;\; \underline{\lambda = \frac{3}{5}} \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{3}{5} = -1 + \frac{9}{5} = \frac{4}{5} \\ y = 2 + \lambda = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \\ z = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(\frac{4}{5},\ \frac{13}{5},\ \frac{6}{5}\right)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula $I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} \cdot dx$.

Realizando la división se deduce que la fracción de la integral de puede expresar de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{x^3} & -2x^2 & +x & -1 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{5-5} -\cancel{x^3} & +3x^2 & -2x & & x + 1 \\ \cline{1-4} & +\cancel{x^2} & -x & -1 & \\ & -\cancel{x^2} & +3x & -2 & \\ \cline{2-4} & & +2x & -3 & \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} \cdot dx = \int \left(x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot dx = \int (x + 1) \cdot dx + \int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \cdot dx =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + x + L \left| x^2 - 3x + 2 \right| + C = I}}$$

Nota: Debe observarse que la derivada del denominador es, precisamente, el numerador.

****

2º) Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} b^2+ax & si \;\; x\le -1 \\ \frac{a}{x} & si \;\; -1<x\le 1 \\ \frac{x^2+ax+1}{x+1} & si \;\; x>1 \end{cases}$ sea derivable en todos sus puntos.

Independientemente de los valores de a y b, la función f(x) está definida para cualquier valor real de x.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto. Los puntos que ofrecen duda de continuidad y derivabilidad son para x = -1 y x = 1.

En primer lugar determinamos los valores de a y b para que la función sea continua en los valores indicados:

$$Para \;\; x=-1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left(b^2+ax\right) = f(-1) = \underline{b^2-a} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{a}{x} = \underline{-a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow b^2-a=-a \Rightarrow \underline{b=0}$$

$$Para \;\; x=1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{a}{x} = f(1) = \underline{a} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+ax+1}{x+1} = \underline{\frac{2+a}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow a = \frac{2+a}{2} \;\; ;; \;\; 2a = 2+a \Rightarrow \underline{a=2}$$

Para los valores obtenidos de a y b, la función es $f(x)=\begin{cases} 2x & si \;\; x\le -1 \\ \frac{2}{x} & si \;\; -1<x\le 1 \\ (x+1)^2 & si \;\; x>1 \end{cases}$

Veamos ahora si para los valores obtenidos la función es derivable en todos sus puntos:

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para los valores x = -1 y x = 1, que es dudosa su derivabilidad.

Para que la función sea derivable para x = -1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & si \;\; x\le -1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si \;\; -1<x\le 1 \\ 2x+2 & si \;\; x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(-1^-)=2 \\ \\ f'(-1^+)=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(-1^-)\neq f'(-1^+)}$$

Para que la función sea derivable para x = 1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & si \;\; x\le -1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si \;\; -1<x\le 1 \\ 2x+2 & si \;\; x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=2 \\ \\ f'(1^+)=4 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(1^-)\neq f'(1^+)}$$

<u>La función no es derivable en x = -1 y x = 1.</u>

****

3º) Siendo $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $AX+B=A^2$ y determina la matriz X.

$AX+B=A^2$;; $AX=A^2-B=M$ $\Rightarrow$ (multiplicando por la izquierda por A^{-1})

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot M$;; $I\cdot X=A^{-1}\cdot M$;; $\underline{\underline{X=A^{-1}\cdot M}}$

$$M=A^2-B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&0\\1&-2&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}=M}$$

Para hallar A^{-1} vamos a utilizar el Método de Gaus-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

Sustituyendo los valores de M y A^{-1} en la expresión de X, queda:

$$X=A^{-1}\cdot M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&3&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}=X}}$$

****

4º) Determina la posición relativa, según los valores del parámetro λ, de los siguientes planos $\pi \equiv x+\lambda y+z-4=0$, $\alpha \equiv x+3y+z-5=0$ y $\beta \equiv \lambda x+y+z-4=0$.

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \lambda & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+1+\lambda^2-3\lambda-1-\lambda=\lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\lambda=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1=1} \;;;\; \underline{\lambda_2=3}$$

Para $\lambda=1$ la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ que, como puede observarse, tiene dos filas iguales, lo que significa que:

$\underline{\underline{\textit{Para } \lambda=1 \textit{ hay dos planos coincidentes que se cortan con el tercero.}}}$

Para $\lambda=3$ la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ que, como puede observarse, tiene las dos primeras filas iguales, excepto en los términos independientes, lo que significa que:

$\underline{\underline{\textit{Para } \lambda=3 \textit{ hay dos planos paralelos que se cortan con el tercero.}}}$

****