PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Este hecho forma parte de la calificación.

OPCIÓN A

1º) Halla una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en el punto A(1, 1) y un punto de inflexión en B(0, 3). ¿Es A el único extremo de la función? Determina los máximos y mínimos relativos de f.

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Por pasar por el punto A(1, 1) $\Rightarrow$ $\underline{a+b+c+d=1}$ (1)

Por tener un extremo relativo en el punto A(1, 1) se ha de cumplir que:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\Rightarrow\; f'(1) = 0 \rightarrow \underline{3a+2b+c=0} \qquad (2)$$

Por pasar por el punto B(3, 0) $\Rightarrow$ $\underline{27a+9b+3c+d=0}$ (3)

Por tener un punto de inflexión en B(0, 3) se cumple que:

$$f''(x) = 6ax + 2b \;\Rightarrow\; f''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \;;;\; \underline{\underline{b=0}}$$

Teniendo en cuenta que b = 0, el sistema resultante de (1), (2) y (3) es:

$$\left.\begin{array}{l} a+c+d=1 \\ 3a+c=0 \\ 27a+3c+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=-3a \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a-3a+d=1 \\ 27a-9a+d=0 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{l} -2a+d=1 \\ 18a+d=0 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{l} 2a-d=-1 \\ 18a+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 20a=-1$$

$$\underline{\underline{a=-\frac{1}{20}}} \;;;\; \underline{\underline{c=\frac{3}{20}}} \;;;\; -2a+d=1 \Rightarrow d=1+2a=1-\frac{2}{20}=1-\frac{1}{10}=\underline{\underline{\frac{9}{10}=d}}$$

La función resultante es la siguiente:

$$\underline{\underline{f(x)=-\frac{1}{20}x^3+\frac{3}{20}x+\frac{9}{10}}}$$

Los máximos y mínimos relativos son:

$$f'(x)=-\frac{3}{20}x^2+\frac{3}{20} \;;;\; f''(x)=-\frac{3}{10}x.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{3}{20}x^2+\frac{3}{20}=0 \;;;\; x^2-1=0 \Rightarrow \underline{x_1=1} \;;;\; \underline{x_2=-1}$$

Para $x=1 \Rightarrow f''(1)=-\frac{3}{10}<0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximo relativo para } x=1 \Rightarrow A(1,\ 1)}}$.

Para $x=-1 \Rightarrow f''(-1)=\frac{3}{10}>0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=-1}$.

$$f(-1)=\frac{1}{20}-\frac{3}{20}+\frac{9}{10}=-\frac{1}{10}+\frac{9}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo} \Rightarrow C\left(-1,\ \frac{4}{5}\right)}}$$

Como se acaba de demostrar, <u>A no es el único extremo relativo de f.</u>

****

2º) Halla el área de la región acotada comprendida entre el eje OY y las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ y $g(x) = \frac{x}{16}$.

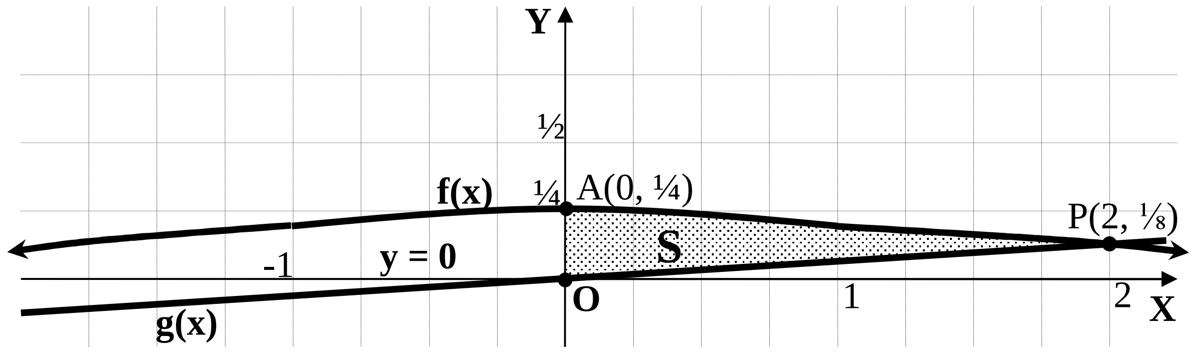
La función f(x) es par, por lo tanto es simétrica con respecto al eje OY; su recorrido f es $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$, lo cual significa que todas sus ordenadas son positivas.

El eje OX es una asíntota horizontal de f(x) por ser $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0$ y, lógicamente su máximo absoluto se produce para x = 0, que resulta ser el punto $A\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

Los puntos de corte de las funciones se obtienen igualando sus ecuaciones:

$\frac{1}{x^2+4} = \frac{x}{16}$;; $16 = x^3 + 4x$;; $x^3 + 4x - 16 = 0$. Resolviendo por Ruffini resulta que la única solución real es para x = 2, resultando el punto de corte $P\left(2,\ \frac{1}{8}\right)$.

Teniendo en cuenta que la función $g(x) = \frac{x}{16}$ pasa por el origen de coordenadas, la representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



De la observación de la figura se deduce que la superficie a calcular es:

$$S = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} \cdot dx - \int_0^2 \frac{x}{16} \cdot dx = \underline{I_1 - I_2 = S} \quad (*)$$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} \cdot dx = \int_0^2 \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} \cdot dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = t \\ dx = 2dt \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} x = 2 \to t = 1 \\ x = 0 \to t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [arc\ sen\ t]_0^1 = \frac{1}{2}(arc\ tag\ 1 - arc\ tag\ 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \underline{\frac{\pi}{8}\ u^2 = I_1}\ .$$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{x}{16} \cdot dx = \frac{1}{16}\int_0^2 x \cdot dx = \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}\ u^2 = I$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2, resulta:

$$S = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi - 1}{8}\ u^2 \cong 0'268\ u^2 = S}}$$

****

3º) Conocido que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-1}}$$

Nos hemos basado en las propiedades de los determinantes siguientes:

Si se cambia una fila de un determinante de signo, el valor del determinante cambia de signo.

Si los elementos de una fila se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2 = 0$:

a) Determina su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman y el punto de corte.

----

a)

Haciendo en la recta $z = \lambda$, su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 1)$.

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 0)$.

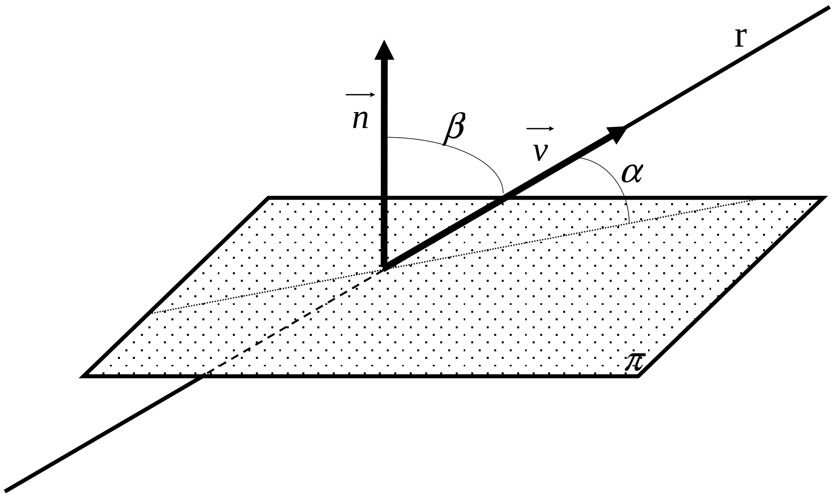
Como puede observarse, el vector director de la recta y el vector normal al plano son linealmente independientes y, por otra parte, su producto escales es distinto de cero:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = (0,\ 1,\ 1) \cdot (1,\ 1,\ 0) = 0 + 1 + 0 = 1 \neq 0.$$

La recta r y el plano π se cortan oblícuamente.

b)

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\overrightarrow{v}$ director de r y un vector $\overrightarrow{n}$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} \qquad (*)$$

Aplicando al caso que nos ocupa es:

$$\cos\beta = sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(0,\ 1,\ 1) \cdot (1,\ 1,\ 0)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{0+1+0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 0'5 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 30^{o}}}$$

El punto P de corte se obtiene del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + (1+\lambda) - 2 = 0 \;\;;;\;\; \underline{\lambda = 2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ y = 1+2 = 3 \\ z = 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P(-1,\ 3,\ 2)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.

b) Calcula el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OY.

----

a)

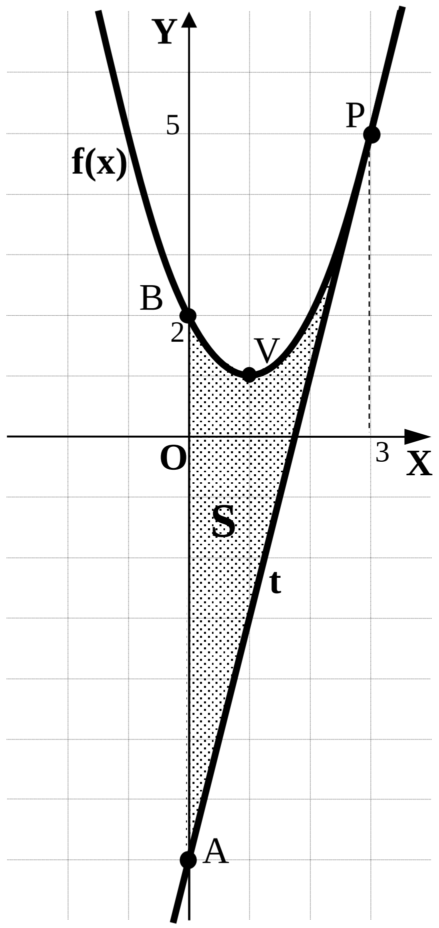
El punto de tangencia es: $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 9 - 6 + 2 = 5 \Rightarrow \underline{P(3,\ 5)}$.

Sabiendo que la pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto y que la ecuación de la recta que pasa por un punto viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la ecuación de la tangente pedida es la siguiente:

$$f'(x) = 2x - 2 \;\Rightarrow\; f'(3) = m = 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = \underline{4 = m}$$

$$\text{Recta tangente} \;\Rightarrow\; t \equiv y - 5 = 4(x - 3) = 4x - 12 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{t \equiv y = 4x - 7}}$$

b)



De la derivada de la función se deduce que el mínimo absoluto de la parábola es para x = 1, que es el valor que la anula, y el punto es: $f(1) = 1 - 2 + 2 = 1 \Rightarrow \underline{V(1,\ 1)}$.

Teniendo en cuenta que el punto de corte de la tangente con el eje de coordenadas es A(0, -7) y que la parábola corta el eje de ordenadas en el punto B(0, 2), la situación gráfica de la situación es, aproximadamente, la reflejada en la figura.

Por ser las ordenadas de la parábola iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la tangente en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, el valor de ésta es el siguiente:

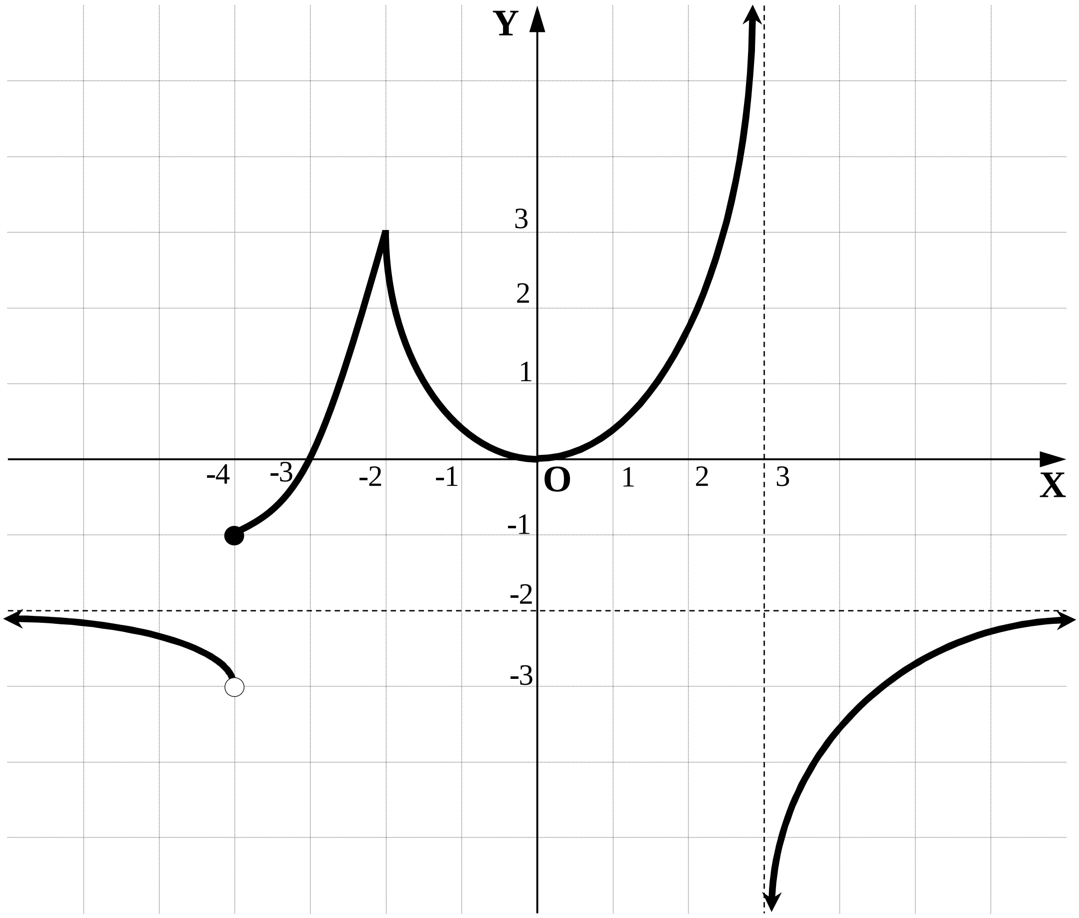
$$S = \int_0^3 \left[(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 =$$

$$= 9 - 27 + 27 - 0 = \underline{\underline{9\ u^2 = S}}$$

****

2º) Determina el dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes coordenados, asíntotas, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad (concavidad hacia arriba y hacia abajo) de la siguiente función:



El dominio de f(x) es: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{3\}}}$.

El recorrido de f(x) es: $\underline{\underline{R(f) \Rightarrow (-\infty,\ -2) \cup [-1,\ +\infty)}}$.

Puntos de corte con los ejes: Eje X: (-3, 0) y (0, 0). Eje Y: (0, 0).

Asíntotas: Horizontales: y = -2. Verticales: x = 3.

Máximo relativo: (-2, 3). Mínimo relativo: (0, 0).

Nota: En el máximo relativo la función, aunque es continua no es derivable.

La función no tiene puntos de inflexión.

$\underline{\underline{Crecimiento \Rightarrow (-4,\ -2) \cup (0,\ 3) \cup (3,\ +\infty)}}$.

$\underline{\underline{Decrecimiento \Rightarrow (-\infty,\ -4) \cup (-2,\ 0)}}.$

$\underline{\underline{Concavidad\ (\cap) \Rightarrow (-\infty,\ -4) \cup (3,\ +\infty)}}.$

$\underline{\underline{Convexidad\ (\cup) \Rightarrow (-4,\ -2) \cup (-2,\ 3)}}.$

****

3º) Discute el sistema $\begin{cases} kx+ky-z=2 \\ 3x-ky=0 \\ 5x+ky=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$, según los valores del parámetro k.

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de M' en función de k es el siguiente:

$$|M'|=\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$ Desarrollando por los menores adjuntos de la última columna:

$$|M'|=-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix}=-4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix}=5k\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=5k\cdot(-3-5)=-40k=0 \;\Rightarrow\; \underline{k=0}$$

Como el mayor rango que puede tener la matriz de coeficiente es tres:

$$\underline{\underline{Para\;\; k\neq 0 \Rightarrow Rang\;\; M=4\;\; ;;\;\; Rang\;\; M'=3 \;\;\Rightarrow\;\; Sistema\;\; Incompatible}}$$

Para k = 0 las matrices son $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, equivalentes a efectos de rango, a las matrices $M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

El evidente que para k = 0 el rango de M es 2. Veamos el rango de M':

$$Rang\ \ M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \{F_1,\ F_2,\ F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 3 = 15 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Rang\ \ M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k = 0 \Rightarrow Rang\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rang\ \ M' = 3\ \ \Rightarrow\ \ Sistema\ \ Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{El\ \ Sistema\ \ es\ \ Incompatible\ \ \forall k \in R}}$$

****

4º) a) Determina si los puntos A(-1, 0, 3), B(2, 4, 1) y C(-4, 3, 1) están alineados.

b) Expresa en dos formas diferentes la ecuación de la recta r que pasa por A y B.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(2,\ 4,\ 1)-(-1,\ 0,\ 3)=(3,\ 4,\ -2)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-4,\ 3,\ 1)-(-1,\ 0,\ 3)=(-3,\ 3,\ -2)$$

$$\frac{3}{-3}\neq\frac{4}{3}\neq\frac{-2}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes}$$

Los puntos A, B y C no están alineados.

b)

La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=(3,\ 4,\ -2)$.

Considerando uno cualquiera de sus puntos, por ejemplo A(-1, 0, 3), se pueden obtener las siguientes expresiones de la recta r:

$$Ecuaciones\ \ paramétricas:\ r\equiv\begin{cases}x=-1+3\lambda\\ y=4\lambda\\ z=3-2\lambda\end{cases}$$

$$Ecuaciones\ \ continuas:\ r\equiv\frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{-2}$$

****