PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elegir UNA y SÓLO UNA opción (A o B) en cada bloque. Si se resuelven las dos opciones de un mismo bloque el tribunal podrá ANULAR EL BLOQUE.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Este hecho forma parte de la calificación.

BLOQUE 1

1º) Para la función dada por $f(x)=\begin{cases}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot e^{-x+1} & si\ \ x>1 \\ sen(x-1) & si\ \ x\le 1\end{cases}$, encontrar los valores de α, β, y γ que hacen que f(x) sea continua, y admita primera y segunda derivada en el punto x = 1.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 1, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=1\ \ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=\underline{\alpha+\beta+\gamma} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} sen\,(x-1)=sen\ 0=\underline{0}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\alpha+\beta+\gamma=0} \qquad (1)$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 1, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} (2\alpha x+\beta)\cdot e^{1-x}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot e^{1-x}=\left[-\alpha x^2+(2\alpha-\beta)x+(\beta-\gamma)\right]\cdot e^{1-x} & si\ \ x>1 \\ \\ \cos(x-1) & si\ \ x\le 1 \end{cases}$$

$$f'(1)=\begin{cases} (-\alpha+2\alpha-\beta+\beta-\gamma)\cdot e^{1-1}=\alpha-\gamma\ \ si\ \ x>1 \\ \\ \cos 0=1 \qquad si\ \ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow\ \ \underline{\alpha-\gamma=1} \qquad (2)$$

La función f(x) admitirá la segunda derivada para el valor x = 1 cuando las segundas derivadas, por la izquierda y por la derecha, sean iguales:

$$f''(x)=\begin{cases} \left[-2\alpha x+(2\alpha-\beta)\right]e^{1-x}-\left[-\alpha x^2+(2\alpha-\beta)x+\beta-\gamma\right]e^{1-x} \\ \\ -sen(x-1) \qquad si\ \ x\le 1 \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} \left[\alpha x^2+(-2\alpha-2\alpha+\beta)x+(2\alpha-\beta-\beta+\gamma)\right]e^{1-x}=\left[\alpha x^2+(-4\alpha+\beta)x+(2\alpha-2\beta+\gamma)\right]e^{1-x} & si\ \ x>1 \\ \\ -sen(x-1) & si\ \ x\le 1 \end{cases}$$

$$f''(1)=\begin{cases} (\alpha-4\alpha+\beta+2\alpha-2\beta+\gamma)\cdot e^{1-1}=-\alpha-\beta+\gamma\ \ si\ \ x>1 \\ \\ -sen\ 0=0 \qquad si\ \ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow\ \ \underline{-\alpha-\beta+\gamma=0} \qquad (3)$$

De la resolución del sistema de ecuaciones lineales (1), (2) y (3) se obtienen los valores $\alpha,\ \beta\ \ y\ \ \gamma$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta=1 \\ -\alpha-\beta+\gamma=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array} \Rightarrow\ De\ \ (1)+(3)\Rightarrow\ 2\gamma=0\ \ ;;\ \ \underline{\gamma=0}\ \ ;;\ \ \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\alpha=1\ ;;\ \underline{\alpha=\frac{1}{2}}$$

$$\alpha+\beta=0\ \rightarrow\ \alpha=-\beta\ \Rightarrow\ \underline{\beta=\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{\alpha=\frac{1}{2}\ \ ;;\ \ \beta=-\frac{1}{2}\ \ ;;\ \ \gamma=0}}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinar los valores a, b, c y d para que se cumplan las siguientes condiciones: a) Que la recta sea tangente a la gráfica de f en el punto P(0, 2) sea paralela a la recta $y + 1 = 0$ y b) Que la recta $x - y - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Por pertenecer el punto P(0, 2) a la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene que ser $f(0) = 2 \;\Rightarrow\; \underline{d = 2}$.

La recta $y + 1 = 0$ es paralela al eje de abscisas, por lo cual, su pendiente es $m_1 = 0$.

La pendiente de la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ en el punto P(0, 2) es el valor de la derivada para el valor x = 0:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\Rightarrow\; m_1 = 0 = f'(0) = c \;\Rightarrow\; \underline{c = 0}.$$

El punto de tangencia de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ y la recta $x - y - 2 = 0$ en el punto de abscisa x = 1 es Q(1, -1), lo cual significa que $f(1) = -1$:

$$f(1) = -1 \;\Rightarrow\; a + b + 2 = -1 \;;;\; \underline{a + b = -3} \qquad (1)$$

La recta $x - y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = x - 2$ tiene de pendiente $m_2 = 1$.

La pendiente de la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ para el valor de x = 1 es el valor de la derivada para ese valor:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \;\Rightarrow\; m_2 = 1 = f'(1) = 3a + 2b \;\Rightarrow\; \underline{3a + 2b = 1} \qquad (2).$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

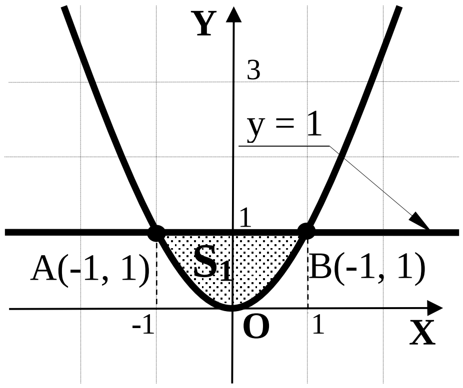
$$\left.\begin{array}{r} a + b = -3 \\ 3a + 2b = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2a - 2b = 6 \\ 3a + 2b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 7} \;;;\; a + b = -3 \;\rightarrow\; b = -a - 3 = -7 - 3 \;\Rightarrow\; \underline{b = -10}$$

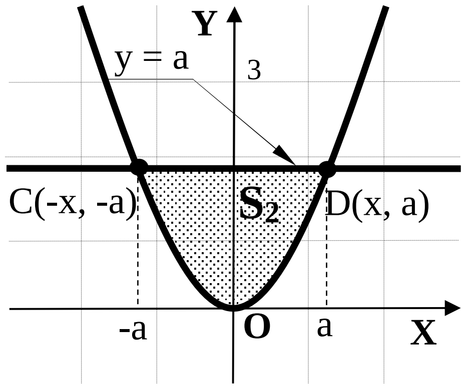
$$\underline{\underline{a = 7 \;;;\; b = -10 \;;;\; c = 0 \;;;\; d = 2}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Calcular el valor de a para que la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta x = a sea el doble del área de la región limitada por dicha parábola y la recta y = 1.





En las figuras se pueden observar las dos situaciones de que trata el ejercicio.

En ambos casos las ordenadas de las rectas son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en los intervalos a considerar correspondientes, por lo que las superficies son las siguientes:

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) \cdot dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left[(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{3}\, u^2 = S_1}$$

$$S_2 = \int_{-a}^{a} \left(a - x^2\right) \cdot dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} = \left(a \cdot a - \frac{a^3}{3} \right) - \left[a \cdot (-a) - \frac{(-a)^3}{3} \right] = a^2 - \frac{a^3}{3} + a^2 - \frac{a^3}{3} =$$

$$= 2a^2 - \frac{2a^3}{3} = \frac{6a^2 - 2a^3}{3} = \underline{\frac{2a^2}{3}(3 - a)\, u^2 = S_2}$$

Por condición del problema es $S_2 = 2S_1 \Rightarrow \frac{2a^2}{3}(3 - a) = 2 \cdot \frac{4}{3}$;; $a^2(3 - a) = 4$;;

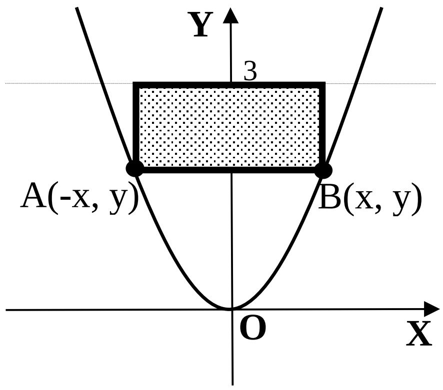
$3a^2 - a^3 = 4$;; $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$. Resolviendo por Ruffini y teniendo en cuenta que el valor de a tiene que ser mayor que 1:

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	$\boxed{0}$

<u>a = 2</u>

****

2º) Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta y = 3: de entre los rectángulos situados como el de la figura adjunta, determinar el que tiene área máxima.



Las dimensiones del rectángulo son (2x) de base e (3 – y) la altura, por lo cuál es valor de su área es:

$$S = (2x) \cdot (3 - y) = (2x) \cdot (3 - x^2) = \underline{6x - 2x^3 = S}\ .$$

Una vez que hemos expresado el valor de la superficie en función de x, la función tiene un máximo relativo para los valores que anulan la primera derivada:

$$S' = 6 - 6x^2 = 6(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 1}\ ;;\ \underline{x_2 = -1}\ .$$

Para justificar el valor del máximo recurrimos a la segunda derivada:

$$S'' = -12x \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow S''(1) = -12 > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo.}} \\ \\ x_2 = -1 \rightarrow S''(-1) = +12 < 0 \Rightarrow \textit{Mínimo.} \end{cases}$$

Para el valor solución x = 1, las dimensiones del rectángulo de mayor área son las siguientes:

$$\underline{\underline{Base:\ 2x = 2\ unidades}}\ ;;\ Altura:\ 3 - y = 3 - x^2 = 3 - 1 = \underline{\underline{2\ unidades = Altura}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Estudiar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6x+2y+2z=6 \\ ax+2y+z=a \\ 5x+3y+az=5 \end{cases}$, según los valores del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea posible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 5 & 3 & a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 6 \\ a & 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Los rangos, en función del parámetro a de las matrices anteriores son:

$$|M|=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 5 & 3 & a \end{vmatrix}=12a+6a+10-20-18-2a^2=-2a^2+18a-28=0 \;;;\; a^2-9a+14=0$$

$$a=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{9\pm 5}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{a_1=2} \\ \underline{a_2=7} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 2 \\ a\neq 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow\; Rango\,M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$\forall a\in R \;\Rightarrow\; \{C_1=C_4\} \;\Rightarrow\; Para\ \begin{Bmatrix} a=2 \\ a=7 \end{Bmatrix} \Rightarrow\; \underline{Rango\ de\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=2 \\ a=7 \end{Bmatrix} \Rightarrow\; Rango\,M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix} a\neq 2 \\ a\neq 7 \end{Bmatrix}$ por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 5 & 3 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+18a-28}=\frac{12a+6a+10-20-18-2a^2}{-2a^2+18a-28}=\frac{-2a^2+18a-28}{-2a^2+18a-28}=\underline{\underline{1=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}6&6&2\\a&a&1\\5&5&a\end{vmatrix}}{-2a^2+18a-28}=\underline{\underline{0=y}} \quad ;; \quad z=\frac{\begin{vmatrix}6&2&6\\a&2&a\\5&3&5\end{vmatrix}}{-2a^2+18a-28}=\underline{\underline{0=z}}$$

Resolvemos para el caso de a = 2:

El sistema resulta $\begin{cases}6x+2y+2z=6\\2x+2y+z=2\\5x+3y+2z=5\end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\begin{cases}6x+2y+2\lambda=6\\2x+2y+\lambda=2\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}6x+2y=6-2\lambda\\-2x-2y=-2+\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow 4x=4-\lambda \ ;; \ \underline{x=1-\frac{1}{4}\lambda} \ ;;$$

$$3x+y+\lambda=3 \ ;; \ y=3-\lambda-3\left(1-\frac{1}{4}\lambda\right)=3-\lambda-3+\frac{3}{4}\lambda=\underline{-\frac{1}{4}\lambda=y}$$

$$\underline{Solución \quad para \quad a=2} \Rightarrow \underline{\underline{\left.\begin{array}{l}x=1-\frac{1}{4}\lambda\\y=-\frac{1}{4}\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\} \forall\lambda\in}}$$

Resolvemos para el caso de a = 7:

El sistema resulta $\begin{cases}6x+2y+2z=6\\7x+2y+z=7\\5x+3y+7z=5\end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\begin{cases}6x+2y+2\lambda=6\\7x+2y+\lambda=7\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-6x-2y=-6+2\lambda\\7x+2y=7-\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=1+\lambda} \ ;;$$

$$3x+y+\lambda=3 \ ;; \ y=3-\lambda-3(1+\lambda)=3-\lambda-3-3\lambda=\underline{-4\lambda=y}$$

$$\underline{Solución \quad para \quad a=7} \Rightarrow \underline{\underline{\left.\begin{array}{l}x=1+\lambda\\y=-4\lambda\\z=\lambda\end{array}\right\} \forall\lambda\in}}$$

****

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Razonar para qué valores de k la matriz $B^t \cdot A^t$ tiene inversa.

b) Resolver la ecuación $(A \cdot B)^t \cdot X = I$, para k = 0, siendo I la matriz identidad.

----

a)

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+2k & 0-0+k \\ -1+0+4 & k+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz $B^t \cdot A^t$ tenga inversa es condición necesaria que su determinante sea distinto de cero:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left| B^t \cdot A^t \right| = \begin{vmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = 2k^2+4k-k-2-3k = 2k^2-2 = 2\left(k^2-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{k_1=1} \\ \underline{k_2=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ \ B^t \cdot A^t\ \ tiene\ \ inversa\ \ \forall k \in R,\ \ \{k \neq -1,\ k \neq 1\}}}$$

b)

$(A \cdot B)^t \cdot X = I$; multiplicando por la izquierda por $\left[(A \cdot B)^t\right]^{-1}$ resulta:

$$\left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} \cdot (A \cdot B)^t \cdot X = \left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} \cdot I \;;;\; I \cdot X = \left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} \Rightarrow \underline{X = \left[(A \cdot B)^t\right]^{-1}}$$

$$Para\ \ k=0\ \ es\ :A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \ y\ \ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0-1+0 & -1+0+4 \\ 0-0+0 & 0+0+2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot B}$$

$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Para obtener la matriz inversa utilizamos el método de Gauss:

$$\left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to \tfrac{1}{2} F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

****

BLOQUE 4

1º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$:

a) Determinar su posición relativa.

b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte.

----

a)

El estudio de la posición relativa mediante vectores directores es como sigue.

La expresión de las rectas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \;;;\; \underline{x = -2 + \lambda} \;;;\; \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;;;\; \underline{y = 5 + \lambda} \;;;\; \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (0,\ 1,\ 1)$, que son linealmente independientes por cumplirse que $\frac{1}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$, lo cual significa que las rectas se cortan o se cruzan.

Para diferenciar el caso determinamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de la recta r, por ejemplo, A(-2, 0, -1) y como extremo un punto de la recta s, por ejemplo, B(2, 5, 0): $\overrightarrow{w} = B - A = (2,\ 5,\ 0) - (-2,\ 0,\ -1) = \underline{(4,\ 5,\ 1) = \overrightarrow{w}}$.

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{w}$ son coplanarios, las rectas se cortan; en caso contrario, se cruzan.

Tres vectores son coplanarios cuando el rango de la matriz que determinan es menor que tres.

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 5 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} = 2}$$

Las rectas r y s se cortan.

b)

El ángulo que forman las rectas r y s es el menor que forman sus vectores directores.

El ángulo que forman dos vectores se deduce de su producto escalar:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(1,\ 1,\ 0)\cdot(0,\ 1,\ 1)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{0+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 0'5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = 60^o}$$

El ángulo que forman las rectas r y s es de 60º.

Existen diversas formas de hallar el punto P de corte; una de ellas consiste en resolver el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que forman las rectas dadas por ecuaciones implícitas, que es el caso:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+2=0 \\ z=-1 \end{cases} \;;;\; \underline{r \equiv \begin{cases} x-y=-2 \\ z=-1 \end{cases}} \;;;\; s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y-z-5=0 \end{cases} \; y \; \underline{s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y-z=5 \end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y=-2 \\ \underline{z=-1} \\ \underline{x=2} \\ y-z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=-2 \;;;\; 2-y=-2 \Rightarrow \underline{y=4} \;;;\; \underline{x=2} \;;;\; \underline{z=-1} \quad \Rightarrow$$

El punto de corte es P(2, 4, -1).

****

2º) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases}$, el plano $\pi \equiv 2x-4y-2z=0$ y el punto $P(1,\ 1,\ 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

----

a)

El haz de planos paralelos a π tienen por ecuación $\pi' \equiv 2x-4y-2z+D=0$, y el plano π_1 que pasa por el punto P(1, 1, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 2x-4y-2z+D=0 \\ \\ P(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1-4\cdot 1-2\cdot 1+D=0\ ;;\ 2-4-2+D=0\ ;;\ \underline{D=-4} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\pi_1 \equiv 2x-4y-2z-4=0}$$

$$\underline{\underline{El\ \ plano\ \ pedido\ \ es\ \ \pi_1 \equiv x-2y-z-2=0}}$$

b)

El plano π_2, por contener a la recta r, tiene como vector director al de r, que es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 3)$.

Un punto de la recta r es Q(2, 2, 3).

El vector $\overrightarrow{w}$ que determinan los puntos P y Q también es director del plano pedido:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = Q-P = (2,\ 2,\ 3)-((1,\ 1,\ 1) = \underline{(1,\ 1,\ 2) = \overrightarrow{w}}$$

La expresión general del plano pedido es la siguiente:

$$\pi_2\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$4(x-1)+(z-1)+3(y-1)-2(z-1)-3(x-1)-2(y-1)=0 \;\;;;$$

$$(x-1)+(y-1)-(z-1)=0 \;\;;;\;\; x-1+y-1-z+1=0 \;\;;;\;\; x+y-z-1=0$$

$$\underline{\underline{\pi_2 \equiv x+y-z-1=0}}$$

****