PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elegir UNA y SÓLO UNA opción (A o B) en cada bloque. Si se resuelven las dos opciones de un mismo bloque el tribunal podrá ANULAR EL BLOQUE.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Este hecho forma parte de la calificación.

BLOQUE 1

1º) Dada la función $f(x)=1-x^2\cdot e^{-x^2}$, se pide:

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal.

---

a)

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su derivada:

$$f'(x)=0-\left[2x\cdot e^{-x^2}+x^2\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}\right]=-\left(2x\cdot e^{-x^2}-2x\cdot x^2\cdot e^{-x^2}\right)=\underline{2x\cdot e^{-x^2}\left(x^2-1\right)=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ 2x\cdot e^{-x^2}\left(x^2-1\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=1}\ ;;\ \underline{x_3=-1}$$

La condición anterior es necesaria pero no suficiente; para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada:

$$f''(x)=2\cdot\left[1\cdot e^{-x^2}\cdot\left(x^2-1\right)+x\,(-2x)\cdot e^{-x^2}\cdot\left(x^2-1\right)+x\cdot e^{-x^2}\cdot 2x\right]=$$

$$=2e^{-x^2}\cdot\left[x^2-1-2x^2\cdot\left(x^2-1\right)+2x^2\right]=2e^{-x^2}\left(3x^2-1-2x^4+2x^2\right)=\underline{2e^{-x^2}\left(-2x^4+5x^2-1\right)=f''(x)}$$

Según que la segunda derivada sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada se tendrá un mínimo o un máximo relativo, respectivamente:

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 (-0+0-1) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo\;\; relativo\;\; para\;\; x=0}$$

$$f(0) = 1 - 0 \cdot e^0 = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo\;\; relativo:\;\; A(0,\;1)}}$$

Teniendo en cuenta que f(x) y f''(x) son pares, se cumple que f''(1) = f''(-1):

$$f''(1) = f''(-1) = 2 \cdot e^{-1}(-2+5-1) = \frac{4}{e} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimos\;\; relativos\;\; para\;\; x=1\;\; y\;\; x=-1}$$

$$f(1) = f(-1) = 1 - 1 \cdot e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimos\;\; relativos:\;\; B\left(1,\;\frac{e-1}{e}\right)\;\; y\;\; C\left(-1,\;\frac{e-1}{e}\right)}}$$

b)

La asíntota horizontal es de la forma y = k, siendo k el valor de la función cuando x toma valores de más infinito o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - x^2 \cdot e^{-x^2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^{x^2}}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} =$$

$$= 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 1 - \frac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; In\det. \;\Rightarrow\; \{L'Hopital\} \;\Rightarrow\; 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\infty} = \underline{1 = k} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Asíntota\;\; horizontal:\;\; y=1}}$$

****

2º) Hallar los valores de a, b y c de forma que la siguiente función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \ -2\le x<0 \\ c+\sqrt{x+1} & si \ 0\le x\le 3 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[-2,\ 3]$, derivable en el intervalo $(-2,\ 3)$ y, tal que $f(-2)=f(3)$.

Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(ax+bx^2\right)=\underline{0} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(c+\sqrt{x+1}\right)=\underline{c+1}=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \ c+1=0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{c=-1}}.$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a+2bx & si \ -2\le x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & si \ 0\le x<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(0^-\right)=\underline{a} \\ f'\left(0^+\right)=\underline{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \ \underline{\underline{a=\dfrac{1}{2}}}.$$

La función, con los datos obtenidos, resulta ser $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+bx^2 & si \ -2\le x<0 \\ -1+\sqrt{x+1} & si \ 0\le x\le 3 \end{cases}$; el valor de b se puede obtener sabiendo que debe cumplirse que $f(-2)=f(3)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)+b\cdot(-2)^2=\underline{4b-1=f(-2)} \\ \\ f(3)=-1+\sqrt{3+1}=-1+2=\underline{1=f(2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 4b-1=1 \ ;; \ 4b=2 \ ;; \ \underline{\underline{b=\dfrac{1}{2}}}$$

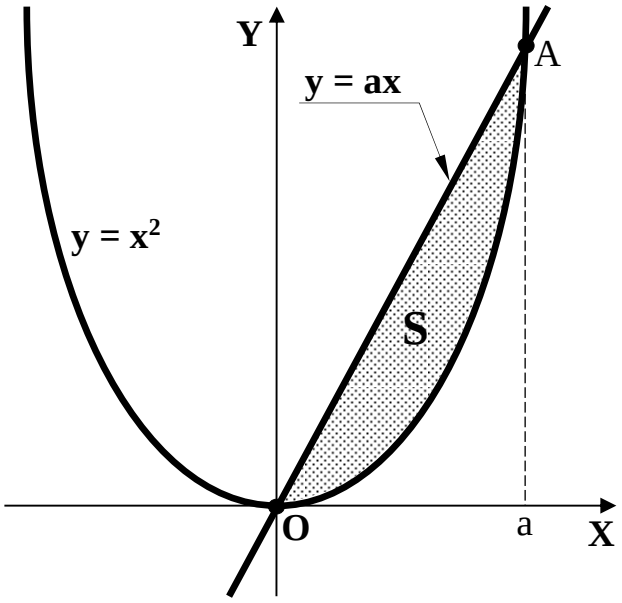
****

BLOQUE 2

1º) Determina el valor de a, siendo a > 0, para que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = ax$ sea igual a $\frac{9}{2}\,u^2$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen igualando sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ \\ y = ax \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = ax \;;;\; x^2 - ax = 0 \;;;\; x(x-a) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ x_2 = a \Rightarrow \underline{A(a,\ a^2)} \end{array}\right.$$



La representación gráfica de la situación es aproximadamente la indicada en la figura adjunta.

Como se observa en la figura, todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo del área, por lo cual, el área considerada es la siguiente:

$$S = \int_0^a \left(ax - x^2\right) \cdot dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{9}{2} \;;;$$

$$\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) - 0 = \frac{9}{2} \;;;\; \frac{3a^3 - 2a^3}{6} = \frac{9}{2} \;;;\; a^3 = 27 = 3^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 3}}$$

****

2º) Calcula las siguientes integrales: $I_1 = \int (2x-1)\cdot L\,x \cdot dx$, $I_2 = \int \frac{1-x}{1+4x^2}\cdot dx$.

$$I_1 = \int (2x-1)\cdot L\,x \cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} u = Lx \to du = \frac{dx}{x} \\ (2x-1)\cdot dx = dv \to v = x^2 - x \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; L\,x \cdot (x^2 - x) - \int (x^2 - x)\cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= (x^2 - x)\cdot L\,x - \int (x-1)\cdot dx = x(x-1)\cdot L\,x - \frac{x^2}{2} + x + C = \underline{\underline{\frac{x}{2}\left[2(x-1)\cdot L\,x - (2-x)\right] + C = I_1}}$$

- - - - - - - - -

$$I_2 = \int \frac{1-x}{1+4x^2}\cdot dx = \int \frac{1}{1+4x^2}\cdot dx - \int \frac{x}{1+4x^2}\cdot dx = \underline{A - B = I_2} \qquad (*)$$

$$A = \int \frac{1}{1+4x^2}\cdot dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2\,dt} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot dt = \frac{1}{2}\,arc\ tag\,t =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\,arc\ tag\,(2x) = A}$$

$$B = -\int \frac{x}{1+4x^2}\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} 1+4x^2 = t \\ 8x\,dx = dt \;\;;;\;\; x\,dx = \frac{1}{8}dt \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; B = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{8}L\,t = \underline{-\frac{1}{8}L\left(1+4x^2\right) = B}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$I_2 = A + B = \frac{1}{2}\,arc\ tag\ (2x) - \frac{1}{8}L\left(1+4x^2\right) + C = \underline{\underline{\frac{1}{8}\left[4\,arc\ tag\ (2x) - L\left(1+4x^2\right)\right] + C = I_2}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la identidad de orden dos I, se pide:

a) ¿Para qué valores de $m \in R$ la matriz M = A – m · I no admite inversa?

b) Describir las matrices cuadradas X de orden dos que cumplen: $(A-3I)\cdot X = O$.

---

a)

$$M = A - m\cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix} = M}$$

Una matriz no admite inversa (no es inversible) cuando su determinante es 0:

$$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \;;;\; (2-m)^2 - 1 = 0 \;;;\; 4 - 4m + m^2 - 1 = 0 \;;;\; m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \underline{m_1 = 3} \;;;\; \underline{m_2 = 1}$$

<u>La matriz M no admite inversa para m = 3 y para m = 1.</u>

b)

Una solución evidente es X = O, razonando del modo siguiente:

$(A-3I)\cdot X = O \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por $(A-3I)^{-1}$:

$$(A-3I)^{-1}\cdot(A-3I)\cdot X = (A-3I)^{-1}\cdot O = O \;;;\; I\cdot X = O \Rightarrow \underline{\underline{X = O}}$$

Sin embargo, la solución anterior no es única como se explica a continuación:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A - 3I}$$

Siendo X la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$(A-3I)\cdot X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -a+c=0 \\ a-c=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{a=c} \;;;\; \begin{Bmatrix} -b+d=0 \\ b-d=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{b=d}$$

Son soluciones todas las matrices de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \ \forall \{a, \ b\} \in R}}$$

****

2º) Se sabe que $A=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-3$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 15c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix}$ b) $\left|\left(-\frac{1}{3}\right)A\right|$ c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

---

a)

$$\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 15c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 5c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=15\cdot(-3)=\underline{\underline{-45}}$$

<u>Propiedad aplicada</u>: “Si se multiplican los elementos de una línea por un número real distinto de cero, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número”.

b)

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot A=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}a_1 & -\frac{1}{3}b_1 & -\frac{1}{3}c_1 \\ -\frac{1}{3}a_2 & -\frac{1}{3}b_2 & -\frac{1}{3}c_2 \\ -\frac{1}{3}a_3 & -\frac{1}{3}b_3 & -\frac{1}{3}c_3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)A\right|=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}a_1 & -\frac{1}{3}b_1 & -\frac{1}{3}c_1 \\ -\frac{1}{3}a_2 & -\frac{1}{3}b_2 & -\frac{1}{3}c_2 \\ -\frac{1}{3}a_3 & -\frac{1}{3}b_3 & -\frac{1}{3}c_3 \end{vmatrix}=\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{27}\cdot(-3)=\underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

<u>Propiedades aplicadas</u>: “El producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos por dicho número”.

“Si se multiplican los elementos de una línea por un número real distinto de cero, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número”.

c)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_3 & -b_3 & -c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-3+0=\underline{\underline{-3}}$$

<u>Propiedades aplicadas</u>: “Si los elementos de una línea de un determinante son suma de dos números, el valor del determinante es igual a la suma de los valores de los

determinantes que tienen en esa línea el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial”.

“Si los elementos de dos líneas paralelas son proporcionales el valor del determinante es cero”.

****

BLOQUE 4

1º) Calcula la ecuación de una recta t que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ -x + 3z + 3 = 0 \end{cases}$ y es paralela a la recta $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-1} = z$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ -x + 3z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;;;\; \underline{x = 3 + 3\lambda} \;;;\; x - 3y + 6 = 0 \;;;\; 3 + 3\lambda - 3y + 6 = 0 \;;;$$

$$3y = 9 + 3\lambda \;;;\; \underline{y = 3 + \lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

El punto P de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ y la recta r es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z + 6 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (3 + 3\lambda) + (3 + \lambda) - \lambda + 6 = 0 \;;;\; 3 + 3\lambda + 3 + \lambda - \lambda + 6 = 0 \;;;\; 12 + 3\lambda = 0 \;;;$$

$$4 + \lambda = 0 \;;;\; \underline{\lambda = -4} \Rightarrow \underline{P(-9,\ -1,\ -4)}$$

La recta t pedida, por ser paralela a la recta $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-1} = z$ tiene el mismo vector director: $\vec{v} = (3,\ -1,\ 0)$.

La ecuación de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = -9 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -4 \end{cases}}}$$

****

2º) Halla la ecuación general del plano π que pasa por el punto P(-1, 0, 2) y contiene a la recta $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z+2$.

El vector $\overrightarrow{v} = (2,\ -3,\ 1)$, director de la recta s, es un vector director del plano π.

Un punto de la recta s es Q(0, 1, -2).

El vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QP}$ también es director del plano π:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (-1,\ 0,\ 2) - (0,\ 1,\ -2) = (-1,\ -1,\ 4).$$

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -12(x+1) - y - 2(z-2) - 3(z-2) + (x+1) - 8y = 0\ ;;$$

$$-11(x+1) - 9y - 5(z-2) = 0\ ;;\ -11x - 11 - 9y - 5z + 10 = 0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 11x + 9y + 5z + 1 = 0}}$$

****