PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elegir UNA y SÓLO UNA opción (A o B) en cada bloque. Si se resuelven las dos opciones de un mismo bloque el tribunal podrá ANULAR EL BLOQUE.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Este hecho forma parte de la calificación.

BLOQUE 1

1º) Obtener razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos de la función $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+5$.

La función, por ser polinómica, está definida para cualquier valor real de x.

$$f'(x)=3x^2+3x-6\ \ ;;\ \ f'(x)=0\ \Rightarrow\ 3(x^2+x-2)=0\ \ ;;\ \ x^2+x-2=0\ \ ;;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-2}\ \ ;;\ \ \underline{x_2=1}$$

Las dos raíces de la primera derivada dividen el dominio de la función en tres intervalos alternativos en cuanto a ser crecientes o decrecientes; es por ellos que, estudiando uno de ellos podemos conocer la condición de todos ellos. Los intervalos son los siguientes: $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 1)$ y $(1,\ +\infty)$. Considerando el valor más fácil posible, x = 0, perteneciente al intervalo $(-2,\ 1)$ es: $f'(0)=-6<0\ \Rightarrow\ \textit{Decreciente.}$

$$f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Crecimiento}\ \Rightarrow\ (-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}}$$

$$f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Decrecimiento}\ \Rightarrow\ (-2,\ 1)}}$$

$$f''(x)=6x+3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(-2)=-12+3=-9<0 \;\Rightarrow\; \underline{\mathit{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ } x=-2} \\ \\ f''(1)=6+3=9>0 \;\Rightarrow\; \underline{\mathit{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ } x=1} \end{cases}$$

$$f(-2)=(-2)^3+\frac{3}{2}\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)+5=-8+6+12+5=15 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\mathit{Máximo}:\ A(-2,\ 15)}}$$

$$f(1)=1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2-6\cdot 1+5=1+\frac{3}{2}-6+5=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\mathit{Mínimo}:\ B\left(1,\ \frac{3}{2}\right)}}$$

****

2º) Hallar el valor que ha de tener m para que la función $f(x)=\begin{cases} 6-m(x+2)^2 & si \quad x \le -1 \\ 3+\dfrac{2}{m(x+2)} & si \quad x<-1 \end{cases}$ sea derivable en x = -1.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

En primer lugar determinamos el valor de m para que la función sea continua en el valor indicado:

$$Para \quad x=-1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} [6-m(x+2)] = f(-1) = \underline{6-m} \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left[3+\dfrac{2}{m(x+2)}\right] = 3+\dfrac{2}{m} = \underline{\dfrac{3m+2}{m}} \end{array} \right\} \Rightarrow 6-m=\frac{3m+2}{m} \ ;;$$

$$6m-m^2=3m+2 \ ;; \ m^2-3m+2=0 \ ;; \ m=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \underline{m_1=1} \ ;; \ \underline{m_2=2}$$

La función es continua para m = 1 y para m = 2.

Veamos ahora si para los valores obtenidos f(x) es derivable en el valor indicado:

Para que la función sea derivable para x = -1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

Para m = 1 la función es $f(x)=\begin{cases} 6-(x+2)^2=6-x^2-4x-4=-x^2-4x+2 & si \quad x \le -1 \\ \\ 3+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3x+6+2}{x+2}=\dfrac{3x+8}{x+2} & si \quad x<-1 \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x-4=-2(x+2) & si \quad x \le -1 \\ \\ \dfrac{3(x+2)-(3x+8)\cdot 1}{(x+2)^2}=\dfrac{3x+6-3x-8}{(x+2)^2}=\dfrac{-2}{(x+2)^2} & si \quad -1<x\le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1^-)=-2(-1+2)=-2 \\ \\ f'(-1^+)=\dfrac{-2}{(-1+2)^2}=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{f'(-1^-)=f'(-1^+)}$$

La función es derivable para m = 1 y para x = -1.

Para m = 2 la función es:

$$f(x)=\begin{cases} 6-2(x+2)^2=6-2(x^2+4x+4)=-2x^2-8x-2 & si \quad x\le -1 \\ 3+\dfrac{2}{2(x+2)}=3+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3x+6+1}{x+2}=\dfrac{3x+7}{x+2} & si \quad x<-1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -4x-8=-4(x+2) & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{3(x+2)-(3x+7)\cdot 1}{(x+2)^2}=\dfrac{3x+6-3x-7}{(x+2)^2}=\dfrac{-1}{(x+2)^2} & si \quad -1<x\le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

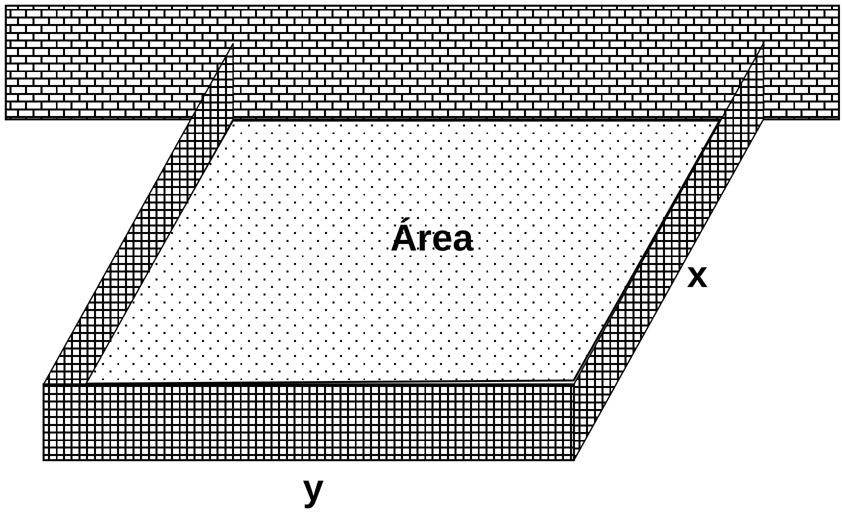
$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-1^-)=-4(-1+2)=-4 \\ f'(-1^+)=\dfrac{-1}{(-1+2)^2}=-1 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(-1^-)\ne f'(-1^+)}$$

La función no es derivable para m = 2 y para x = -1.

****

BLOQUE 2

1º) Se desea vallar una parcela rectangular aprovechando una pared recta como uno de los lados de la misma. Si se dispone de una valla de 120 metros de longitud para marcar los otros tres lados, determinar las dimensiones de la parcela para se su área sea máxima.



$$L = 2x + y = 120 \ metros \ ;; \ \underline{y = 120 - 2x}$$

$$Área = A = x \cdot y = x \cdot (120 - 2x) = 120x - 2x^2 \quad ;; \quad A' = 120 - 4x$$

$$A' = 0 \Rightarrow 120 - 4x = 0 \ ;; \ 120 = 4x \ ;; \ x = \frac{120}{4} = \underline{\underline{30 \ metros = x}}$$

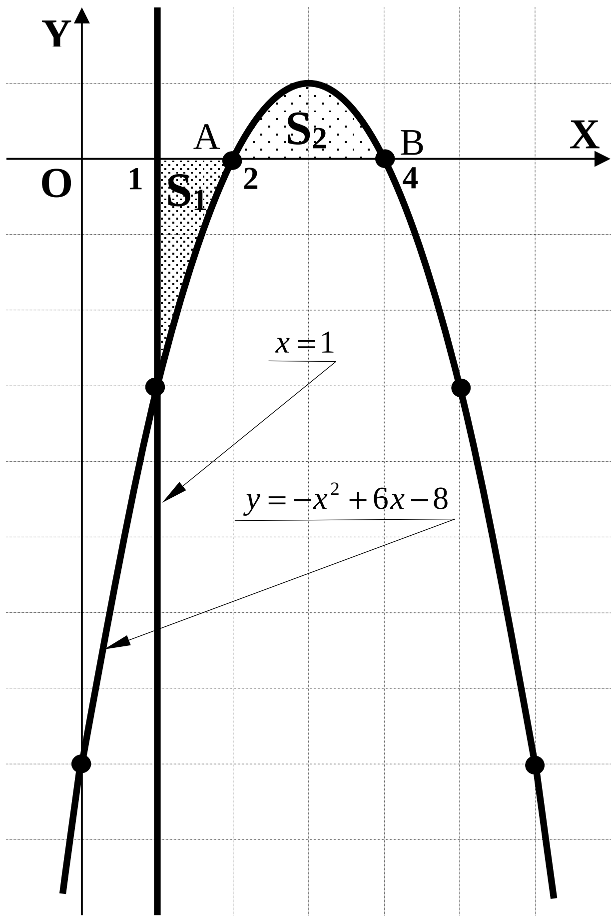
$$y = 120 - 2x = 120 - 2 \cdot 30 = 120 - 60 = \underline{\underline{60 \ metros = y}}$$

$$Justificación: \ A'' = -4 < 0 \Rightarrow Máximo$$

Las dimensiones de la parcela son 30 x 60 metros.

****

2º) Representar las regiones limitadas por la curva $y=-x^2+6x-8$, la recta x = 1 y el eje OX, calculando el área total de dichas regiones.



Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas son:

$y=-x^2+6x-8=0 \;\Rightarrow\; x^2-6x+8=0$;;

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=3\pm 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \;\rightarrow\; \underline{A(2,\;0)} \\ x_2=4 \;\rightarrow\; \underline{B(4,\;0)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura adjunta.

Las ordenadas correspondientes a la superficie S_1 son negativas, por ello, cambiamos los límites de integración para determinar su área.

Las áreas pedidas son las siguientes:

$$S_1=\int_2^1\left(-x^2+6x-8\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-8x\right]_2^1=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^1=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+3-8\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+3\cdot 2^2-8\cdot 2\right)=-\frac{1}{3}-5+\frac{8}{3}-12+16=\frac{7}{3}-1=\underline{\frac{4}{3}\;u^2=S_1}$$

$$S_2=\int_2^4\left(-x^2+6x-8\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-8x\right]_2^4=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^4=$$

$$=\left(-\frac{4^3}{3}+3\cdot 4^2-8\cdot 4\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+3\cdot 2^2-8\cdot 2\right)=-\frac{64}{3}+48-32+\frac{8}{3}-12+16=20-\frac{56}{3}=$$

$$=\underline{\frac{4}{3}\;u^2=S_1} \;\Rightarrow\; S_T=S_1+S_2=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\underline{\underline{\frac{8}{3}\;u^2=S_T}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Dado el sistema $\begin{cases} 2x-3y+az=1 \\ x+z=0 \\ 3x+y-3z=a \end{cases}$, hallar el valor del parámetro a para que sea compatible. ¿Por qué lo es?

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -3 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & a \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=a-9-2-9=a-20=0 \;\Rightarrow\; \underline{a=20}$$

Para a = 20 es $M'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 20 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 20 \end{pmatrix}$.

$$Rango \;\; de \;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 20 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-(2+9)=-11\neq 0$$

$$\underline{Para \;\; a=20 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M=2 \;\; y \;\; Rango \;\; M'=3 \;\Rightarrow\; Sistema \;\; incompatible}$$

$$\underline{Para \;\; a\neq 20 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M=Rango \;\; M'=3=n^{o} \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Sistema \;\; compatible \;\; \det er \min ado}$$

<u>El sistema es compatible determinado para a ≠ 20</u>

Es compatible determinado por la aplicación del teorema de Rouché-Fröbenius, que indica que:

<u>Un sistema es compatible cuando los rangos de ambas matrices son iguales.</u>

****

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de B · C – 2 A^t.

$$B \cdot C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0+6 & -2-8 & 1+0 \\ 0+9 & 0-12 & -0+0 \\ 0+3 & 4-4 & -2+0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}=B \cdot C}$$

$$A^t=\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; \underline{2 \cdot A^t=\begin{pmatrix} 4 & -14 & 2 \\ 6 & -10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B \cdot C-2A^t=\begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -14 & 2 \\ 6 & -10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 14 & -2 \\ -6 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\underline{=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}=B \cdot C-2A^t}$$

$$\left| B \cdot C-2A^t \right|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=8-12+24-6-16+24=56-34=22$$

$$\underline{\underline{\left| B \cdot C-2A^t \right|=22}}$$

****

<u>BLOQUE 4</u>

1º) Dado el punto P(5, 0, -1) exterior a la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R)$, hallar el plano π que contenga a r y pase por P.

Este ejercicio puede hacerse de diferentes formas; una de ellas es la siguiente:

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 1)$.

Un punto de r es Q(0, -4, 2).

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (5,\ 0,\ -1) - (0,\ -4,\ 2) = (5,\ 4,\ -3)$.

El vector $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 1)$ es director del plano π pedido por ser director de una recta que está contenida en el. El vector $\overrightarrow{v} = (5,\ 4,\ -3)$ también es vector director de π por tener su origen en el punto P, que pertenece al plano por definición, y su extremo en un punto de una recta que también pertenece al plano.

Considerando el punto P, la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 5y + 4(z+1) - 4(x-5) + 3y = 0\ \ ;;$$

$$4(x-5) - 8y - 4(z+1) = 0\ \ ;;\ \ (x-5) - 2y - (z+1) = 0\ \ ;;\ \ x - 5 - 2y - z - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 2y - z - 6 = 0}}$$

****

2º) Estudiar la posición relativa de los tres planos $\pi_1 \equiv 2x-3y+z=2$, $\pi_2 \equiv 3x-2y-z=7$ y $\pi_3 \equiv x+y-2z=5$. En caso de que se corten en un punto, hallarlo. Y en caso de que se corten en una recta, determinarla.

Siendo M y M' las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, que determinan los tres planos, según sus rangos, pueden presentarse los seis siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 → S. C. D. → Los tres planos se cortan en un punto.

Rango M = Rango M' = 2 → S. C. I. → Los tres planos se cortan en una recta.

Rango M = Rango M' = 1 → S. C. I. → Los tres planos son coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 → S. I. → Dos planos paralelos cortados por el 3º.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 3 → S. I. → Los tres planos son paralelos.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 2 → S. I. → Dos planos coincidentes y secantes al 3º.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$Rango\ \ M \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=8+3+3+2+2-18=18-18=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=2}.$$

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-20+6-21+4-14+45=55-55=0 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-10-12+7+2+28-15=37-37=0 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=15+8+7+2-42+10=42-42=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M'=2 \ \rightarrow\ S.\ C.\ D.\ \rightarrow\ Los\ \ tres\ \ planos\ \ se\ \ cor\tan\ \ en\ \ una\ \ recta}}$$

La ecuación de la recta puede expresarse por dos ecuaciones implícitas que pueden ser las ecuaciones de dos cualesquiera de los planos; por ejemplo, tomando los planos $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 2$ y $\pi_2 \equiv 3x - 2y - z = 7$:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ 3x - 2y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

****