PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elegir UNA y SÓLO UNA opción (A o B) en cada bloque. Si se resuelven las dos opciones de un mismo bloque el tribunal podrá ANULAR EL BLOQUE.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Este hecho forma parte de la calificación.

BLOQUE 1

1º) Obtener los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 15$ donde la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos A(0, -12) y B(1, 12).

La recta que pasa por los puntos A y B es la siguiente:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow r \equiv \frac{y + 12}{12 + 12} = \frac{x - 0}{1 - 0} \;;;\; y + 12 = 24x \;;;\; y = 24x - 12 \Rightarrow \underline{m = 24}.$$

La pendiente de la tangente a una curva en un punto es igual que el valor de la derivada de la curva en ese punto:

$$y' = 3x^2 - 6x = 24 \;;;\; x^2 - 2x = 8 \;;;\; x^2 - 2x - 8 = 0 \;;;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = -2} \;;;\; \underline{x_2 = 4}$$

Los puntos pedidos son los siguientes:

$$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 15 = -8 - 12 + 15 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{P(-2,\ -5)}}$$

$$y(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 15 = 64 - 48 + 15 = 31 \Rightarrow \underline{\underline{Q(4,\ 31)}}$$

****

2º) Obtener dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como máximos y mínimos de la función $y = \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4}$.

El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -2}, \ \underline{x_2 = 2} \Rightarrow \underline{\underline{D(y) \Rightarrow R - \{-2, \ 2\}}}$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los valores del dominio de la función donde la derivada es positiva y negativa, respectivamente:

$$y'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - (x^2 + 8) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 4 - x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2} = \underline{\frac{-24x}{(x^2 - 4)^2}}.$$

$$y'(x) > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Crecimiento: \ (-\infty, \ -2) \cup (-2, \ 0)}}$$

$$y'(x) < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decrecimiento: \ (0, \ 2) \cup (2, \ +\infty)}}$$

Es condición necesaria para que una función tenga un máximo o mínimo relativo que se anule la primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada la función tiene un máximo relativo y si es positiva, un mínimo relativo.

$$y'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-24x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \ ;; \ -24x = 0 \ ;; \ \underline{x = 0}.$$

$$y''(x) = \frac{-24 \cdot (x^2 - 4)^2 - (-24x) \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{-24 \cdot (x^2 - 4) + 96x}{(x^2 - 4)^3} = \underline{\frac{24(-x^2 + 3x + 4)}{(x^2 - 4)^3}}$$

$$y''(0) = \frac{24 \cdot (4)}{(-4)^3} = \frac{96}{-64} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo \ \ relativo \ \ para \ \ x = 0}.$$

$$y(0) = \frac{+8}{-4} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo \ \ relativo \ \Rightarrow P(0, \ -2)}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Calcula el área del recinto limitado por la curva $y=4-x^2$, la recta $8x+2y=16$ y la recta $y=4x+8$.

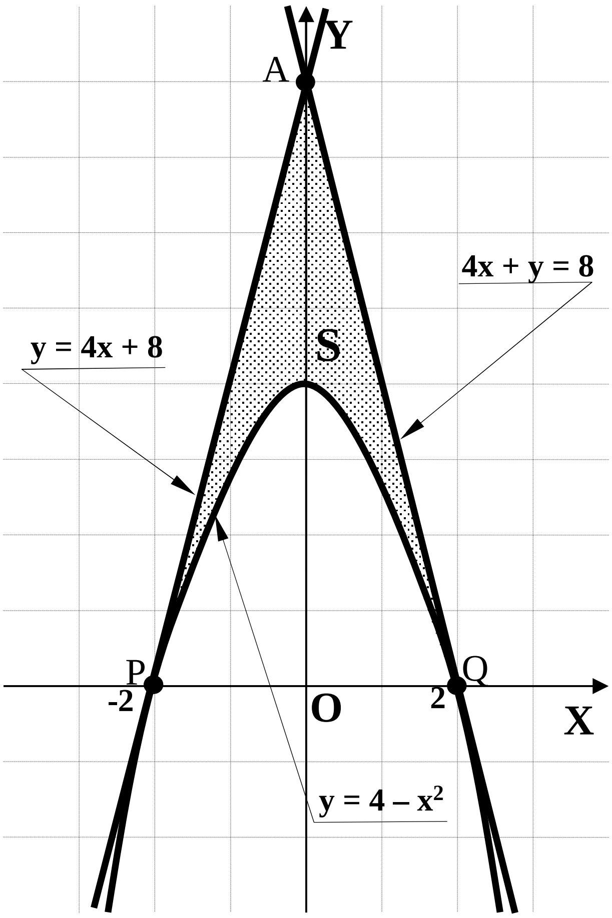
Los puntos de corte de las dos rectas con la curva son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y=4-x^2 \\ 8x+2y=16 \end{array}\right\} \rightarrow 2y=16-8x \;;;\; y=8-4x \quad \Rightarrow \; 4-x^2=8-4x \;;;\; x^2-4x+4=0 \;;;$$

$$(x-2)^2=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=2} \;\Rightarrow\; y(2)=4-2^2=4-4=0 \;\Rightarrow\; \underline{P(2,\; 0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=4-x^2 \\ y=4x+8 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 4-x^2=4x+8 \;;;\; x^2+4x+4=0 \;;;\; (x+2)^2=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=-2} \;\Rightarrow\; y(-2)=4-(-2)^2=$$

$$=4-4=0 \;\Rightarrow\; \underline{Q(-2,\; 0)}$$



Teniendo en cuenta que las dos rectas pasan por el punto A(0, 8) y que la curva es simétrica respecto al eje de ordenadas y que tiene su máximo en el punto B(0, 4), la representación gráfica de la situación es la que se expresa en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta la simetría vertical del área a calcular:

$$S=2\cdot\int_0^2\left[(8-4x)-(4-x^2)\right]dx=$$

$$=2\cdot\int_0^2\left(x^2-4x+4\right)dx=2\cdot\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^2=$$

$$=2\cdot\left[\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+4\cdot 2\right)-0\right]=\underline{\underline{\frac{16}{3}\;u^2=S}}$$

****

2º) Calcular las siguientes integrales: $a)\ I=\int \frac{dx}{x^2-1}$ $\qquad b)\ I=\int x^2\cdot e^{3x}\cdot dx$.

$$a)\quad I=\int \frac{1}{1-x^2}\cdot dx=\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\cdot dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A+Ax+B-Bx}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{(A-B)x+(A+B)}{(1-x)(1+x)} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix}A-B=0\\A+B=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow\; 2A=1\ ;;\ \underline{A=\frac{1}{2}}\ ;;\ \underline{B=\frac{1}{2}}$$

$$I=\int\left(\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}\right)\cdot dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}\cdot dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}\cdot dx=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2=\underline{\frac{1}{2}(I_1+I_2)=I}\qquad (*)$$

$$I_1=\int\frac{1}{1-x}\cdot dx \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}1-x=t\\dx=-dt\end{Bmatrix} \Rightarrow\; \int\frac{1}{t}\cdot(-dx)=-\int\frac{1}{t}\cdot dt=-L\,t=\underline{-L|1-x|=I_1}$$

$$I_2=\int\frac{1}{1+x}\cdot dx \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}1+x=t\\dx=dt\end{Bmatrix} \Rightarrow\; \int\frac{1}{t}\cdot dt=L\,t+C=\underline{L|1+x|+C=I_2}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2, queda:

$$I=\frac{1}{2}\left[-L|1-x|+L|1+x|\right]+C=\frac{1}{2}\left[L|1+x|-L|1-x|\right]+C=\frac{1}{2}L\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C=\underline{\underline{L\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}+C=I}}$$

$$b)\quad I=\int x^2\,e^{3x}\cdot dx \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}u=x^2\to du=2x\cdot dx\\ e^{3x}\cdot dx=dv\to v=\frac{e^{3x}}{3}\quad (*)\end{Bmatrix} \Rightarrow\; I=x^2\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}\cdot 2x\cdot dx=$$

$$=\frac{x^2\cdot e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\int x\,e^{3x}\cdot dx=\underline{\frac{x^2\cdot e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\cdot I_1=I}\qquad (1)$$

$$I_1=\int x\,e^{3x}\cdot dx \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix}u=x\to du=dx\\ e^{3x}\cdot dx=dv\to v=\frac{e^{3x}}{3}\end{Bmatrix} \Rightarrow\; I_1=x\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}\cdot dx=$$

$$=\frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot dx=\frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3}=\underline{\frac{e^{3x}}{9}(3x-1)=I_1}$$

Sustituyendo en la expresión (1) el valor obtenido de I_1 resulta:

$$I=\frac{x^2\cdot e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{9}(3x-1)=\underline{\underline{\frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2-6x+2\right)+C=I}}$$

$$(*)\qquad v=\int e^{3x}\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix}3x=t\\ dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ v=\frac{1}{3}\cdot\int e^t\cdot dt=\frac{e^t}{3}=\underline{\frac{e^{3x}}{3}=v}$$

****

BLOQUE 3

1º) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar las matrices A y B que verifican el sistema $\begin{cases} 2A+B=M \\ A-3B=N \end{cases}$.

b) Calcular $M^{-1} \cdot N^{t}$.

----

a)

$$\begin{cases} 2A+B=M \\ A-3B=N \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6A+3B=3M \\ A-3B=N \end{array}\right\} \Rightarrow 7A=3M+N \;;;\; \underline{A=\frac{1}{7}(3M+N)}$$

$$\begin{cases} 2A+B=M \\ A-3B=N \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A+B=M \\ -2A+6B=-2N \end{array}\right\} \Rightarrow 7B=M-2N \;;;\; \underline{B=\frac{1}{7}(M-2N)}$$

$$A=\frac{1}{7}(3M+N)=\frac{1}{7}\left[3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}=A}}$$

$$B=\frac{1}{7}(M-2N)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix}=B}}$$

b)

$$(M/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2-2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\frac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1-2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \;;;\; \underline{N^{t}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$M^{-1}\cdot N^{t}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{4} & 0+\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{4} & -0+\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\underline{\underline{M^{-1}\cdot N^{t}}}$$

****

2º) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k: $\begin{cases} x+ky+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ kx+y+z=4 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ k & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+1+k^2-3k-1-k=k^2-4k+3=0$$

$$k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow \underline{k_1=1} \;;;\; \underline{k_2=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{cases} k\neq 1 \\ k\neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=3=n^o\; incógnitas \;\Rightarrow Compatible\; determinado}}$$

$$Para \;\; k=1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; M=Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; k=1 \;\Rightarrow\; Rango\; M=Rango\; M'=2<n^o\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; indeterminado}}$$

$$Para \;\; k=3 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=12+4+45-36-5-12=49-41=8\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; k=3 \;\Rightarrow\; Rango\; M=2 \;\;;;\;\; Rango\; M'=3 \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

****

BLOQUE 4

1º) Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} y = 1 + x \\ z = 2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R)$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} y = 1 + x \\ \underline{z = 2} \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \; ;; \; \underline{y = 1 + \lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son A(0, 1, 2) y $\overrightarrow{v_r} = (1, \; 1, \; 0)$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v_s} = (-2, \; 0, \; 1)$.

El plano pedido tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas y, por contener a la recta r, contiene a todos sus puntos, por lo cual contiene al punto A(0, 1, 2).

La expresión general del plano pedido π es la siguiente:

$$\pi\left(A; \; \overrightarrow{v_r}, \; \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ;; \; x + 2(z-2) - (y-1) = 0 \; ;; \; x - 2z + 4 - y + 1 = 0 .$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y - 2z + 5 = 0}}$$

****

2º) Dado el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z = 5$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z + 3$, hallar su posición relativa. Si se cortan en un punto, hallar sus coordenadas. Y si son paralelos, hallar el plano que contenga a r y sea paralelo a π.

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z + 3 \Rightarrow \begin{cases} -x = y - 1 \\ x = 2z + 6 \end{cases} ;; \underline{r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2z - 6 = 0 \end{cases}}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2z - 6 = 0 \\ 3x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Según los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M’ = 3 $\rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M’ = 2 $\rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M’ son los siguientes:

$$Rango\ \ M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 4 - 1 = -11 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}$$

<u>La recta r y el plano π se cortan en un punto.</u>

El punto de corte es la solución del sistema. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-10 - 4 - 6}{-11} = \frac{-20}{-11} = \underline{\frac{20}{11} = x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&6&-2\\3&5&1\end{vmatrix}}{-11}=\frac{6-6+10-1}{-11}=\frac{9}{-11}=\underline{-\frac{9}{11}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&6\\3&-2&5\end{vmatrix}}{-11}=\frac{-2+18+12-5}{-11}=\frac{23}{-11}=\underline{-\frac{23}{11}=z}$$

$$\underline{\underline{El\quad punto\quad de\quad corte\quad es\quad P\left(\frac{20}{11},\ -\frac{9}{11},\ -\frac{23}{11}\right)}}$$

****