PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se debe responder a una pregunta de cada bloque.

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$, determinar los valores α, b y c para que se cumplan las siguientes condiciones:

a) Que la gráfica de f(x) pase por el punto A(0, 4).

b) Que la recta $y=-4x+7$ sea tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 1.

Para que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ pase por el punto A tiene que ser $f(0)=4$:

$$f(x)=ax^2+bx+c \;\Rightarrow\; f(0)=4 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{c=4}}.$$

La pendiente a una curva en un punto coincide con el valor de la derivada de la curva en ese punto. La pendiente de la recta $y=-4x+7$ es $m=-4$.

$$f(x)=2ax+b \;\Rightarrow\; m=f'(1)=-4 \;\Rightarrow\; \underline{2a+b=-4}. \qquad (1)$$

Para x = 1 los valores de las funciones curva y recta son iguales, o sea, $f(1)=y(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a+b+4 \\ y(1)=-4+7=3 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; a+b+4=3 \;\;;;\;\; \underline{a+b=-1}. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=-4 \\ a+b=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a+b=-4 \\ -a-b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=-3}} \;;;\; a+b=1 \;;;\; -3+b=1 \;;;\; \underline{\underline{b=4}}.$$

$$\underline{\underline{La \quad función \quad es \quad f(x)=-3x^2+4x+4}}$$

****

2º) Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar operarios y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra "y" máquinas y contrata "x" operarios, el número de unidades de producto que puede fabricar viene dado por la función $P = 105x^2y$. Cada máquina le supone una inversión de 2.000 euros y cada contrato de un operario le cuesta 1.600 euros. Si el empresario sólo dispone de un presupuesto de 12.000 euros para este fin, determina el número de operarios que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción.

Por los datos del ejercicio tiene que ser:

$$2.000x + 1.600y \leq 12.000 \;\;;;\;\; 20x + 16y \leq 120 \;\;;;\;\; 5x + 4y \leq 30 \;\;;;\;\; \underline{y \leq \frac{30-5x}{4}}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en la función de producción de unidades del producto a fabricar, resulta:

$$P = 105x^2y = 105x^2 \cdot \frac{30-5x}{4} = \frac{525}{4}x^2(6-x).$$

Para que la producción sea máxima tiene que anularse su derivada:

$$P' = \frac{525}{4} \cdot \left[2x \cdot (6-x) + x^2 \cdot (-1)\right] = \frac{525}{4} \cdot \left(12x - 2x^2 - x^2\right) = \frac{525}{4} \cdot \left(12x - 3x^2\right) =$$

$$= \frac{525}{4} \cdot 3x \cdot (4-x) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 0} \;\;;;\;\; \underline{x_2 = 4}.$$ Es evidente que la solución lógica es x = 4.

Vamos a justificar que para x = 4 se produce un máximo, para lo cual tenemos que probar que la segunda derivada es negativa para este valor:

$$P''(x) = \frac{525}{4} \cdot (12 - 6x) \;\Rightarrow\; P''(4) = \frac{525}{4} \cdot (12 - 6 \cdot 4) = \frac{525}{4} \cdot (-12) < 0, \;\; \underline{c.q.p.}.$$

Teniendo en cuenta que, tanto el número de obreros como el de máquinas tienen que ser números naturales, el número de obreros a contratar es el mayor posible de su expresión en función de x:

$$y \leq \frac{30 - 5 \cdot 4}{4} = \frac{30-20}{4} = \frac{10}{4} = 2'5 \;\Rightarrow\; \underline{y = 2}.$$

<u>La producción se maximiza comprando 4 máquinas y contratando a dos obreros.</u>

****

3º) Resolver la ecuación $A \cdot X = B^T + 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 2.

$A \cdot X = B^T + 2I \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por la inversa de A:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^T + 2I\right) \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^T + 2I\right) \;;;\; \underline{X = A^{-1} \cdot \left(B^T + 2I\right)}.$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \;;;\; B^T + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B^T + 2I}.$$

Para obtener la matriz inversa de A utilizamos el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 4F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to \tfrac{1}{5} F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X y operando:

$$X = A^{-1} \cdot \left(B^T + 2I\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} + \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} - 0 \\ -\frac{16}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{16}{5} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{13}{5} & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{13}{5} & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Dadas las rectas $r \equiv (x,\ y,\ z) = (-8,\ -4,\ 5) + \lambda(-2,\ 1,\ -2)$ y $s \equiv \begin{cases} 4y - 3x = 8 \\ 4z - 5x = 60 \end{cases}$.

a) Comprobar que se cortan en un punto y obtener sus coordenadas.

b) Hallar la ecuación de la recta t paralela a s que pasa por el punto P(1, 0, -1).

----

a)

Una expresión más correcta de s es $s \equiv \begin{cases} 3x - 4y = -8 \\ 5x - 4z = -60 \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -8 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$, y por unas ecuaciones continuas es $r \equiv \frac{x+8}{-2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-5}{-2}$; por último la expresamos por dos ecuaciones implícitas: $r \equiv \begin{cases} x + 8 = -2y - 8 \\ x + 8 = z - 5 \end{cases}$ o mejor expresada: $r \equiv \begin{cases} x + 2y = -16 \\ x - z = -13 \end{cases}$.

Si las rectas r y s se cortan en un punto el sistema que forman tiene por soluciones las coordenadas de dicho punto. El sistema es $\begin{cases} 3x - 4y = -8 \\ 5x - 4z = -60 \\ x + 2y = -16 \\ x - z = -13 \end{cases}$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas sea compatible determinado, el rango de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que tener de rango tres.

Las matrices son $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & -4 & 60 \\ 1 & 2 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

$$Rango\ \ M \ \Rightarrow \ \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 24 = 40 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}.$$

$$Rango\ \ M' \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & -4 & 60 \\ 1 & 2 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -1 & 13 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_2 - 4F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 16 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 \cdot (1-2-3+4) = 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}.$$

<u>En efecto, las rectas se cortan en un punto, c. q. c.</u>

Para determinar el punto de corte despreciamos una ecuación y resolvemos el sistema resultante (por ejemplo, la segunda): $\begin{cases} 3x-4y=-8 \\ x+2y=-16 \\ x-z=-13 \end{cases}$.

De las dos primeras ecuaciones: $\left.\begin{matrix} 3x-4y=-8 \\ 2x+4y=-32 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x=-40 \;\;;;\;\; \underline{x=-8}$.

$x+2y=-16 \;\;;;\;\; -8+2y=-16 \;\;;;\;\; 2y=-8 \;\;;;\;\; \underline{y=-4}$.

$x-z=-13 \;\;;;\;\; z=x+13=-8+13=\underline{5=z}$.

<u>El punto de corte de las rectas r y s es P(-8, -4, 5).</u>

b)

Un vector director de la recta $s \equiv \begin{cases} 3x-4y=-8 \\ 5x-4z=-60 \end{cases}$ puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que se obtiene al multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (3, \; -4, \; 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (5, \; 0, \; -4)$.

$$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 16i + 20k + 12j = 16i + 12j + 20k = (16, \; 12, \; 20) = \overrightarrow{u'}.$$

Un vector director de s es $\overrightarrow{u} = (4, \; 3, \; 5)$.

La recta t, paralela a s que pasa por P(1, 0, -1) es:

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 5\lambda \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar valores de m para que la función $f(x)=\begin{cases} m^2 \cdot sen\ x, & si\ \ x \le 0 \\ e^{-mx}-1, & si\ \ x>0 \end{cases}$ sea derivable en toda la recta real.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función es continua para cualquier valor real de x, excepto para x = 0 cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Para que f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(m^2 \cdot sen\ x\right) = \underline{0} = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(e^{-mx}-1\right) = e^0 - 1 = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x)\ \ es\ \ continua\ \ para\ \ x=0}.$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} m^2 \cdot \cos x & si\ \ x \le 0 \\ -m e^{-mx} & si\ \ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = m^2 \cdot 1 = \underline{m^2} \\ f'(0^+) = \underline{-m} \end{cases} \Rightarrow m^2 = -m\ \ ;;$$

$$m^2+m=0\ \ ;;\ \ m(m+1)=0 \Rightarrow \underline{m_1=0}\ \ ;;\ \ \underline{m_2=-1}.$$

La función f(x) es derivable en x = 0 para m = 0 y para m = -1.

****

2º) Calcular: a) $I_1 = \int_0^2 x \cdot \sqrt{2x^2+1} \cdot dx$ b) $I_2 = \int \frac{x^2+3}{x^2-2x} \cdot dx$.

----

a)

$$I_1 = \int_0^2 x \cdot \sqrt{2x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|r} 2x^2+1=t & x=2 \to t=9 \\ 4x\,dx = dt & \\ xdx = \frac{1}{4}dt & x=0 \to t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \int_1^9 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_1^9 t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^9 = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[t\sqrt{t} \right]_1^9 = \frac{1}{6} \cdot \left[\left(9\sqrt{9}\right) - \left(1\sqrt{1}\right) \right] = \frac{1}{6} \cdot (27-1) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 26 = \underline{\underline{\frac{13}{3}}} = I_1$$

b)

$$I_2 = \int \frac{x^2+3}{x^2-2x} \cdot dx = \int \frac{x^2-2x+2x+3}{x^2-2x} \cdot dx = \int \frac{x^2-2x}{x^2-2x} \cdot dx + \int \frac{2x+3}{x^2-2x} \cdot dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{2x+3}{x^2-2x} \cdot dx = \underline{x + I_3 = I_2}.$$

$$I_3 = \int \frac{2x+3}{x(x-2)} \cdot dx \Rightarrow \frac{2x+3}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx}{x(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A}{x(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=2 \\ -2A=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A = -\frac{3}{2}} \;;;\; B = 2-A = 2+\frac{3}{2} = \underline{\frac{7}{2} = B} \Rightarrow I_3 = -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x-2} \cdot dx =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot L\,x + \frac{7}{2} \cdot L|x-2| + C = \underline{\frac{1}{2} \cdot L \frac{|x-2|^7}{x^3} + C = I_3}.$$

Sustituyendo en el valor de I_2:

$$\underline{\underline{I_2 = x + \frac{1}{2} L \frac{|x-2|^7}{x^3} + C}}$$

****

3º) Estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x+3z=-2 \\ 3x-4y-7z=8 \end{cases}$ y en caso posible, resolverlo.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -7 \end{vmatrix}=-4-18+36-14=36-36=0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M=2}.$$

$$Rango\;\; M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}=-4+12-24+16=0 \\ \\ \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{vmatrix}=72-7-6-9-42-8=0 \\ \\ \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & -7 & 8 \end{vmatrix}=-48+8+12+28=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Rango\;\; M=Rango\;\; M'=2<n^{o}\;\; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\;\; Indeterminado}}$$

Para resolverlo despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda; el sistema resulta $\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x+3z=-2 \end{cases}$. Haciendo $z=\lambda$; $x=-2-3\lambda$; el valor de y es:

$$-6-9\lambda-2y+\lambda=1 \;\;;;\;\; 2y=-7-8\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=-\tfrac{7}{2}-4\lambda} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-2-3\lambda \\ y=-\tfrac{7}{2}-4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}.$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = z+1$ y los puntos A(1, 1, 0) y B(2, 0, -3), se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a la recta r y al punto A.

b) Hallar el ángulo formado por la recta r y la recta que pasa por los puntos A y B.

----

a)

Un punto y un vector director de r son P(3, 0, -1) y $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ 1)$, respectivamente.

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP} = P - A = (2,\ -1,\ -1)$.

El plano π pedido lo determinan los vectores $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ 1)$ y $\overrightarrow{w} = (2,\ -1,\ -1)$ y el punto A(1, 1, 0):

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-3(x-1) - 2z + 2(y-1) - 6z + (x-1) + 2(y-1) = 0 \ ;; \ -2(x-1) + 4(y-1) - 8z = 0 \ ;;$$

$$(x-1) - 2(y-1) + 4z = 0 \ ;; \ x - 1 - 2y + 2 + 4z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0}}$$

b)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -1,\ -3)$.

El ángulo pedido es el mismo que forman los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Del concepto de producto escalar de dos vectores puede deducirse el valor del coseno del ángulo que forman:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos \alpha \ \Rightarrow \ \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{(1,\ -1,\ -3) \cdot (2,\ 3,\ 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2-3-3}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{4+9+1}} = \frac{-4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{154}} = -0'3223 \ \Rightarrow \ \alpha = 108^{\circ}\ 48'\ 14''.$$

Como quiera que el ángulo pedido es el formado por las rectas, debemos considerar al menor de los ángulos, que siempre es menor o igual a 90º.

La mejor solución es el ángulo complementario de α, que es $\beta = 71^{o}\ 11'\ 46''$.

El ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B es $\beta = 71^{o}\ 11'\ 46''$.

****