PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} sen(2x)+\frac{1}{3}\cdot e^{-2x}, & si\ \ x\le 0 \\ \frac{x+1}{3}+L(x+1), & si\ \ 0<x<2 \\ \sqrt{x^2-2x}, & si\ \ x\ge 2 \end{cases}$ en todo su dominio, dando expresiones de la derivada donde exista.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, estudiamos en primer lugar, su continuidad.

La función f(x) en continua para cualquier valor real de x, excepto para x = 0 y para x = 2, cuya continuidad es dudosa. Para que f(x) sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[sen\,(2x)+\frac{1}{3}\cdot e^{-2x}\right]=f(0)=\underline{\frac{1}{3}} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x+1}{3}+L(x+1)\right]=\underline{\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x)\ es\ contínua\ \ para\ \ x=0}.$$

Para que f(x) sea continua para x = 2 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{x+1}{3} + L(x+1)\right] = \underline{1+L3} \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2-2x} = f(2) = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x)\ no\ es\ contínua\ para\ x=2}.$$

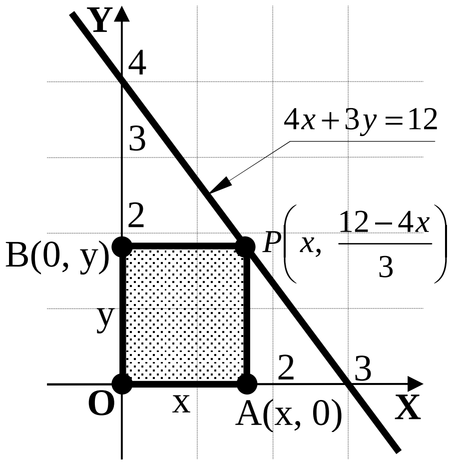
$$\underline{\underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=2}}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$\underline{\underline{f'(x) = \begin{cases} 2\cos(2x) - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x}, & si\ x \le 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{x+1}, & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}, & si\ x \ge 2 \end{cases}}} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 - \frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{3}} \\ \\ f'(0^+) = \frac{1}{3} + 1 = \underline{\frac{4}{3}} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x)\ es\ derivable\ para\ x=0}}.$$

****

2º) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima situado en el primer cuadrante, que tenga un vértice en el origen de coordenadas, un vértice en el eje OX, otro sobre el eje OY y otro sobre la recta de ecuación $4x+3y=12$.



La representación gráfica de la situación puede apreciarse en la figura adjunta.

Siendo x la base del rectángulo e y la altura, el vértice del rectángulo de eje OX es A(x, 0); el vértice del eje OY es B(0, y) y el punto del rectángulo situado en la recta es $C\left(x,\ \frac{12-4x}{3}\right)$.

El área del rectángulo es $S=x\cdot y$; en función de una sola variable es: $4x+3y=12$;; $y=\frac{12-4x}{3} \Rightarrow S(x)=x\cdot\frac{12-4x}{3}=\underline{\frac{1}{3}\left(12x-4x^2\right)=S(x)}$.

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que anularse:

$$S'(x)=\frac{1}{3}(12-8x)=\frac{4}{3}(3-2x)=0 \Rightarrow 3-2x=0 \;;;\; \underline{x=\frac{3}{2}=1'5}.$$

$$y=\frac{12-4x}{3}=\frac{12-4\cdot\frac{3}{2}}{3}=\frac{12-6}{3}=\frac{6}{3}=\underline{2=y}.$$

<u>El área del rectángulo es máxima para 1’5 unidades de base y 2 de altura.</u>

****

3º) Dado el sistema $\begin{cases} 3x-ay=-3 \\ 2x+ay-5z=13 \\ x+3y-2z=5 \end{cases}$:

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro α.

b) Resolverlo para α = 9.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 3 & -a & 0 & -3 \\ 2 & a & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-6a+5a+45-4a=45-5a=0 \ ;; \ 9-a=0 \Rightarrow \underline{a=9}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \ a\neq 9 \ \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M'=3=n^o \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ Determinado}}$$

$$Para \ a=9 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \ M' \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 2 & 9 & 13 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 13 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-9\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-9\cdot(-15+2+13-3+13-10)=0 \Rightarrow \underline{Rango \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \ a=9 \ \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M'=2<n^o \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ Indeterminado}}$$

b)

Para α = 9 resulta el sistema $\begin{cases} 3x-9y=-3 \\ 2x+9y-5z=13 \\ x+3y-2z=5 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para resolverlo despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda y parametrizamos una incógnita, por ejemplo, $\underline{z=\lambda}$:

$$\begin{rcases} \begin{cases} 3x-9y=-3 \\ x+3y-2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x-3y=-1 \\ x+3y=5+2\lambda \end{matrix} \end{rcases} ;; \ 2x=4+2\lambda \ ;; \ \underline{x=2+\lambda} \ ;; \ x-3y=-1 \ ;; \ 3y=x+1=$$

$$=2+\lambda+1=3+\lambda \ ;; \ \underline{y=1+\tfrac{1}{3}\lambda}.$$

$$Solución: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \frac{1}{3}\lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

****

4º) Dados los puntos A(-1, 2, 0) y B(2, 1, -1):

a) Determinar si el punto C(5, 0, -2) está alineado con los anteriores, explicando el motivo (hacer un dibujo esquemático de la situación).

b) Hallar las ecuaciones de la recta que contiene a los puntos A y B, en forma continua, en forma de paramétricas y como intersección de dos planos.

c) Hallar la ecuación en forma general del plano π que pasa por B y es perpendicular a la recta que contiene a los puntos A y B.

----

a)

Para que el punto C(5, 0, -2) esté alineado con los puntos A(-1, 2, 0) y B(2, 1, -1) es necesario que los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(2,\ 1,\ -1)-(-1,\ 2,\ 0)=(3,\ -1,\ -1).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(5,\ 0,\ -2)-(-1,\ 2,\ 0)=(6,\ -2,\ -2).$$

Como se observa es $\underline{\overrightarrow{v}=2\cdot\overrightarrow{u}}$.

<u>Los puntos A(-1, 2, 0), B(2, 1, -1) y C(5, 0, -2) están alineados.</u>

b)

Las ecuaciones de la recta r que contiene a los puntos A y B, en las formas pedidas son las expresadas a continuación.

El vector director de r es $\overrightarrow{u}=(3,\ -1,\ -1)$.

Considerando, por ejemplo, el punto B(2, 1, -1):

Dada por unas ecuaciones continuas: $\underline{\underline{r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}}}$.

Dada por unas ecuaciones paramétricas: $\underline{\underline{r\equiv\begin{cases}x=2+3\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-1-\lambda\end{cases}}}$.

Dada por unas ecuaciones implícitas:

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}-x+2=3y-3\\ -x+2=3z+3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{r\equiv\begin{cases}x+3y-5=0\\ x+3z+1=0\end{cases}}}.$$

c)

El plano π, por ser perpendicular a la recta que contiene a los puntos A y B, tiene como vector norman al vector director de la recta que pasa por los puntos A y B; su expresión es de la forma $\alpha \equiv 3x - y - z + D = 0$.

De los infinitos planos que determina $\alpha \equiv 3x - y - z + D = 0$, el plano π que contiene al punto B(2, 1, -1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 3x - y - z + D = 0 \\ B(2,\ 1,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 \cdot 2 - 1 - (-1) + D = 0\ ;;\ 6 - 1 + 1 + D = 0\ ;;\ \underline{D = -6}\,.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x - y - z - 6 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Representar la gráfica de una función f(x) que tenga las siguientes propiedades:

a) Es continua en todos los valores reales salvo -4 y 0.

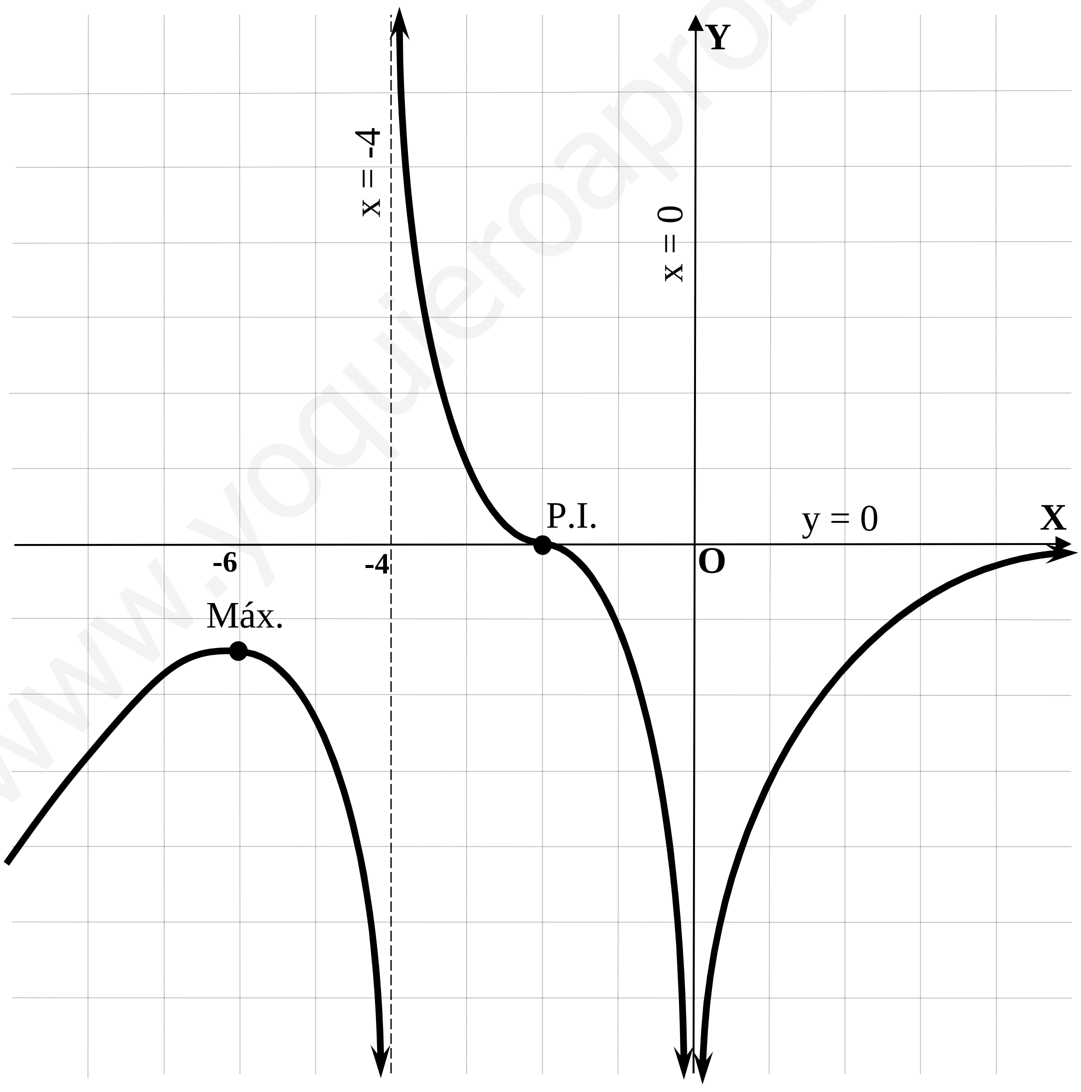
b) Tiene asíntotas verticales x = -4 y x = 0.

c) Para x →+∞, se cumple f(x) → 0.

d) Corta al eje OX solamente en un punto, que es de inflexión.

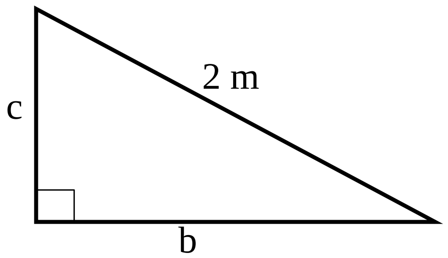
e) Su función derivada es negativa en $(-\infty, -6)$ y en $(-4, 0)$, siendo positiva en $(-6, -4)$ y en $(0, +\infty)$.

La función pedida es, aproximadamente, la que aparece en la gráfica adjunta.



****

2º) Se desea hacer una ventana con forma de triángulo rectángulo, de modo que el lado mayor sea de 2 metros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de los otros dos lados para que la ventana tenga área máxima?



$$b^2+c^2=2^2 \;;;\; \underline{c=\sqrt{4-b^2}}\,. \qquad (*)$$

$$S=\frac{b\cdot c}{2}=\frac{b\cdot\sqrt{4-b^2}}{2}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-b^4}=S}$$

El área es máxima cuando su derivada es cero:

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{8b-4b^3}{2\cdot\sqrt{4b^2-b^4}}=\frac{2b-b^3}{\sqrt{4b^2-b^4}}=\frac{b\left(2-b^2\right)}{b\cdot\sqrt{4-b^2}}=\frac{2-b^2}{\sqrt{4-b^2}}=0 \;\Rightarrow\; 2-b^2=0 \;;;\; b^2=2 \;;;$$

$$\underline{b=\sqrt{2}\ unidades}\,.$$

Sustituyendo en (*): $c=\sqrt{4-b^2}=\sqrt{4-2}=\underline{\sqrt{2}\ unidades=c}\,.$

$$\underline{\underline{Se\ trata\ de\ un\ triángulo\ rectángulo\ e\ isósceles\ de\ catetos\ \sqrt{2}\ unidades}}$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''=\frac{-2b\cdot\sqrt{4-b^2}-\left(2-b^2\right)\cdot\dfrac{-2b}{2\cdot\sqrt{4-b^2}}}{\left(\sqrt{4-b^2}\right)^2}=\frac{-2b\cdot\sqrt{4-b^2}+\dfrac{b\left(2-b^2\right)}{\sqrt{4-b^2}}}{4-b^2}=\frac{-2b\left(4-b^2\right)+2b-b^3}{\left(4-b^2\right)\cdot\sqrt{4-b^2}}=$$

$$=\frac{-8b+2b^3+2b-b^3}{\left(4-b^2\right)\cdot\sqrt{4-b^2}}=\frac{b^3-6b}{\left(4-b^2\right)\cdot\sqrt{4-b^2}}=\underline{\frac{b\left(b^2-6\right)}{\left(4-b^2\right)\cdot\sqrt{4-b^2}}=S''}\,.$$

$$S''_{\left(\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(2-6\right)}{\left(4-2\right)\cdot\sqrt{4-2}}=\frac{-4\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}}=-2<0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo,\ c.q.j.}$$

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$:

a) Calcular la inversa de A paso a paso.

b) Resolver la ecuación matricial: $A \cdot X = B + C$.

----

a)

Vamos a calcular la inversa de A paso a paso por dos procedimientos diferentes.

En primer lugar aplicando la fórmula $A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

De la expresión anterior se deduce que para que una matriz sea inversible es condición necesaria que su determinante sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=6-1-3=2\neq 0 \Rightarrow \underline{\text{La matriz A tiene inversa.}}$$

La matriz traspuesta de A es: $A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. $|A|=2$.

$$Adj\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}}{2}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A^{-1}}}$$

En segundo lugar, utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow -\tfrac{1}{5} F_2 \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{5} & 0 & -\tfrac{1}{5} & \tfrac{2}{5} \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \rightarrow F_1 - 3F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\tfrac{3}{5} & 0 & \tfrac{3}{5} & -\tfrac{1}{5} \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{5} & 0 & -\tfrac{1}{5} & \tfrac{2}{5} \\ 0 & 0 & \tfrac{2}{5} & 1 & \tfrac{3}{5} & -\tfrac{1}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ F_3 \rightarrow \tfrac{5}{2} F_3 \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\tfrac{3}{5} & 0 & \tfrac{3}{5} & -\tfrac{1}{5} \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{5} & 0 & -\tfrac{1}{5} & \tfrac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{5}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \rightarrow F_1 + \tfrac{3}{5} F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - \tfrac{1}{5} F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \tfrac{3}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{5} & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{5}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \tfrac{3}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{5}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}}}.$$

b)

$A \cdot X = B + C$. Multiplicando por la izquierda los dos términos por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + C) \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot (B + C) \;;;\; \underline{X = A^{-1} \cdot (B + C)} \qquad (*)$$

$$B + C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = B + C}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos y operando:

$$X = A^{-1} \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} \tfrac{3}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{5}{2} & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 9 - \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} & 9 + 3 - 2 \\ -0 - 3 + \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} & -3 - 1 + 2 \\ 0 + 9 - \tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{2} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} & 15 + 3 - 2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} \tfrac{17}{2} & \tfrac{5}{2} & 10 \\ -\tfrac{5}{2} & -\tfrac{1}{2} & -2 \\ \tfrac{17}{2} & \tfrac{7}{2} & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 5 & 20 \\ -5 & -1 & -4 \\ 17 & 7 & 32 \end{pmatrix} = X}}$$

****

4º) Dados la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$ y el punto P(-1, 2, 3), hallar la ecuación en forma general del plano π que los contiene.

Una de las diversas formas de hacer este ejercicio es la siguiente:

En primer lugar expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas, con objeto de obtener un punto y un vector director de r.

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-3y=-\lambda \\ x+y=1+2\lambda \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x-3y=-\lambda \\ 3x+3y=3+6\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5x=3+5\lambda \ ;;$$

$$\underline{x=\frac{3}{5}+\lambda} \ ;; \ x+y=1+2\lambda \ ;; \ \frac{3}{5}+\lambda+y=1+2\lambda \ ;; \ y=1+\lambda-\frac{3}{5}=\underline{\frac{2}{5}+\lambda=y}.$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=\frac{3}{5}+\lambda \\ y=\frac{2}{5}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{Q\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{5},\ 0\right)} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)}.$$

Los puntos P y Q determinan el siguiente vector:

$$\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=\left(\tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{5},\ 0\right)-(-1,\ 2,\ 3)=\left(\tfrac{8}{5},\ -\tfrac{8}{5},\ -3\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w}=(8,\ -8,\ -15)}.$$

El plano π lo determinan el punto P y los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{w}$:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -8 & -15 \end{vmatrix}=0 \ ;;$$

$$-15(x+1)+8(y-2)-8(z-3)-8(z-3)+8(x+1)+15(y-2)=0 \ ;; \ -7(x+1)+23(y-2)-16(z-3)=0 \ ;;$$

$$-7x-7+23y-46-16z+48=0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\pi \equiv 7x-23y+16z+5=0}}.$$

****