PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JULIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $y=\sqrt{x^2+1}$ en su punto extremo.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}$.

c) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$.

----

a)

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada: $y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Rightarrow \underline{x=0}$.

El punto de tangencia es el siguiente: $y_{(0)}=\sqrt{0^2+1}=1 \Rightarrow \underline{P(0,\ 1)}$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto: $y'_{(0)}=\frac{0}{\sqrt{0^2+1}}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \underline{m=0}$.

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$: $y-1=0\cdot(x-0)=0$.

<u>La recta tangente pedida es y = 1.</u>

b)

$$\lim_{x \to 4}\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}=\left(\frac{4+2}{6}\right)^{\frac{1}{4-4}}=1^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\ "tipo\ n^{o}\ e"\Rightarrow \lim_{x \to 4}\left(\frac{x+2+4-4}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}=$$

$$=\lim_{x \to 4}\left(\frac{6+x-4}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}=\lim_{x \to 4}\left(1+\frac{x-4}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}=\lim_{x \to 4}\left(1+\frac{1}{\frac{6}{x-4}}\right)^{\frac{1}{x-4}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{6}{x-4}=n\ ;;\ \frac{1}{x-4}=\frac{n}{6}\ \middle|\ \begin{matrix} x\to 4 \\ n\to\infty\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{6}}=\lim_{x \to \infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{6}}=\left[\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{6}}=$$

$$=\underline{\underline{e^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{e}}}\ .$$

c)

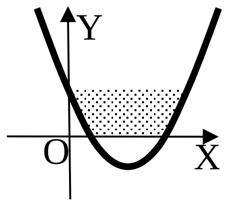
$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2-1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{0-1}{0}-\frac{1}{0}=-\infty-\infty=\underline{\underline{-\infty}}\ .$$

De otra forma:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2-1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0}\frac{x^2-1-x}{x^2}=\frac{0-1-0}{0}=-\frac{1}{0}=\underline{\underline{-\infty}}$$

****

2º) La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)=x^2-4x+3$ representada respecto a los ejes coordenados. Calcular el área de la parte sombreada.

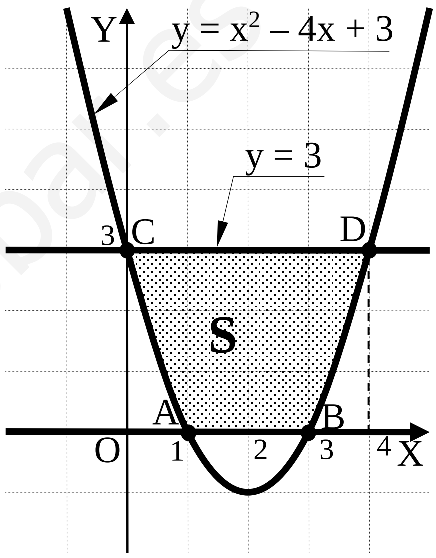


Los puntos de corte de la función $f(x)=x^2-4x+3$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

Eje X: $f(x)=0\ ;;\ x^2-4x+3=0\ ;;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\Rightarrow \underline{x_1=1}\ ;;\ \underline{x_2=3}\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A(1,\ 0)}\ y\ \underline{B(3,\ 0)}$.

Eje Y: $x=0\ ;;\ f(0)=3\Rightarrow \underline{C(0,\ 3)}$.



Las rectas horizontales que limitan la superficie a calcular son el eje de abscisas e y = 3.

Los puntos de corte de la recta y = 3 con la función f(x) son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-4x+3 \\ y=3 \end{array}\right\}\Rightarrow\ x^2-4x+3=3\ ;;\ x^2-4x=0\ ;;$$

$x(x-4)=0\Rightarrow \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=4}\ \Rightarrow\ \underline{C(0,\ 3)}\ y\ \underline{D(4,\ 3)}$.

La representación gráfica de la situación se puede apreciar en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que las ordenadas de la recta y = 3 son mayores o iguales que las correspondientes de la función f(x), la superficie a calcular es:

$$S=\int_0^4 3\cdot dx-\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)\cdot dx-\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)\cdot dx=$$

$$=\int_0^4 3\cdot dx+\int_1^0\left(x^2-4x+3\right)\cdot dx+\int_4^3\left(x^2-4x+3\right)\cdot dx=\left[3x\right]_0^4+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^0+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_4^3=$$

$$=(3\cdot 4)-0+0-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1\right)+\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3\right)-\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2+3\cdot 4\right)=$$

$$=12-\frac{1}{3}+2-3+9-18+9-\frac{64}{3}+32-12=31-\frac{65}{3}=\frac{93-65}{3}=\underline{\underline{\frac{28}{3}\ u^2=S}}\ .$$

****

3º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{pmatrix}$:

a) Determinar los valores del parámetro m para que la matriz A tiene inversa.

b) Calcular la inversa de la matriz A para m = 2.

----

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m-3=0 \;;;\; m^2-4m+3=0 \;;;\; m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=$$

$$=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \underline{m_1=1} \;;;\; \underline{m_2=3}.$$

$$\underline{\underline{A \text{ es inversible } \forall m \in R-\{1,\ 3\}}}$$

b)

Para m = 2 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3+F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to \tfrac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3-3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to 2F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1-4F_3 \\ F_2 \to F_2-\frac{1}{2}F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Dados el punto P(2, 2, -2) y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$:

a) Hallar la ecuación del plano π_1 que contiene a r y pasa por P.

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a P y es perpendicular a r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=-2-2\lambda \\ 3y+z=-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -y-z=2+2\lambda \\ 3y+z=-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=2+\lambda \;;;$$

$$\underline{y=1+\frac{1}{2}\lambda} \;;;\; y+z=-2-2\lambda \;;;\; z=-y-2-2\lambda=-1-\frac{1}{2}\lambda-2-2\lambda=\underline{-3-\frac{5}{2}\lambda=z} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-3-\frac{5}{2}\lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de r son A(0, 1, -3) y $\overrightarrow{v_r}=(2,\ 1,\ -5)$.

Los puntos A y P determinan el vector:

$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AP}=P-A=(2,\ 2,\ -2)-(0,\ 1,\ -3)=(2,\ 1,\ 1)$.

La expresión general del plano π_1 es la siguiente:

$$\pi_1\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v_r}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=0 \;;;$$

$$-5(x-2)+2(y-2)+2(z+2)-2(z+2)-(x-2)+10(y-2)=0 \;;;\; -6(x-2)+12(y-2)=0 \;;;$$

$$(x-2)-2(y-2)=0 \;;;\; x-2-2y+4=0.$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv x-2y+2=0}}$$

b)

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por vector normal al vector director de la recta, o sea: $\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ -5)$. La expresión general del haz es $\alpha \equiv 2x+y-5z+D=0$.

De los infinitos planos que constituyen el haz α, el plano π_2 que contiene a P y es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv 2x+y-5z+D=0 \\ P(2,\ 2,\ -2)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot 2+2-5\cdot(-2)+D=0\ ;;\ 4+2+10+D=0\ ;;\ 16+D=0\ ;;\ \underline{D=-16}.$$

$$\underline{\underline{\pi_2 \equiv 2x+y-5z-16=0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\le -1\\ \dfrac{bx}{\sqrt{x+2}} & x>-1\end{cases}$, hallar valores de α y b para que f(x) sea derivable en todo R.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = -1, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = -1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=-1\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(x+a)^2=f(-1)=\underline{(a-1)^2}\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{bx}{\sqrt{x+2}}=\frac{-b}{\sqrt{1}}=\underline{-b}\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{(a-1)^2=-b}. \qquad (1)$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = -1, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = -1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases}2(x+a) & x\le -1\\ b\cdot\dfrac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}} & x>-1 \quad (*)\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{bx}{\sqrt{x+2}}\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{b\cdot\sqrt{x+2}-bx\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}=b\cdot\frac{\sqrt{x+2}-\frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}=b\cdot\frac{\frac{2(x+2)-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}=$$

$$=b\cdot\frac{2x+4-x}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\underline{b\cdot\frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=g'(x)} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(-1^-)=2(-1+a)\\ f'(-1^+)=b\cdot\dfrac{-1+4}{2(-1+2)\sqrt{-1+2}}=3b\end{array}\right\}\Rightarrow\ f'(-1^-)=f'(-1^+)\Rightarrow\ -2+2a=3b\ ;;\ \underline{b=\frac{2a-2}{3}}.$$

Sustituyendo en la expresión (1) el valor obtenido de b:

$$(a-1)^2=-b\ ;;\ (a-1)^2=-\frac{2a-2}{3}\ ;;\ 3(a^2-2a+1)=-2a+2\ ;;\ 3a^2-6a+3=-2a+2\ ;;$$

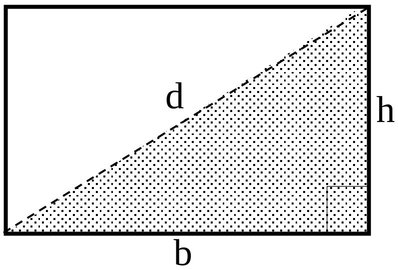
$$3a^2-4a+1=0\ ;;\ a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}\Rightarrow \underline{a_1=1}\ ;;\ \underline{a_2=\frac{1}{3}}.$$

$$b_1=\frac{2\cdot 1-2}{3}=\underline{0=b_1}\ \ ;;\ \ b_2=\frac{2\cdot\frac{1}{3}-2}{3}=\frac{\frac{2}{3}-2}{3}=\frac{\frac{2-6}{3}}{3}=\underline{-\frac{4}{9}=b_2}\ .$$

$$\underline{\underline{f(x)\ es\ derivable\ en\ R\ para\ \{a=1,\ b=0\}\ y\ también\ para\ \left\{a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{4}{9}\right\}}}$$

****

2º) Entre todos los rectángulos de área 8 m^2 hallar las dimensiones del que minimiza el producto de las diagonales.



El área de un rectángulo de base b y altura h es el valor de su producto: S = b · h.

Sabiendo que el área es de 8 m^2: $b \cdot h = 8$;; $\underline{h = \frac{8}{b}}$.

Del triángulo rectángulo sombreado de la figura:

$$d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{8}{b}\right)^2 = b^2 + \frac{64}{b^2} = \frac{b^4 + 64}{b^2}.$$

Como las diagonales de un rectángulo son iguales, lo que se desea minimizar es, precisamente, el valor hallado $P = d \cdot d = d^2 = \frac{b^4 + 64}{b^2}$.

$$P' = \frac{4b^3 \cdot b^2 - \left(b^4 + 64\right) \cdot 2b}{b^4} = \frac{4b^4 - 2\left(b^4 + 64\right)}{b^3} = \frac{4b^4 - 2b^4 - 128}{b^3} = \underline{\frac{2b^4 - 128}{b^3}}.$$

$$P' = 0 \Rightarrow \frac{2b^4 - 128}{b^3} = 0 \;;;\; 2b^4 - 128 = 2\left(b^4 - 64\right) = 0 \;;;\; b^4 = 64 \;;;\; b^2 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{b = 2\sqrt{2}}}.$$

$$h = \frac{8}{b} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2} = h = b}}.$$

El rectángulo pedido es un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ metros

****

3º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=z \\ (m-1)x+y+z=m \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$:

a) Discutirlo según los valores de m.

b) Resolverlo para m = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ m-1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix}=-1+1-(m-1)^2+1-(m-1)+(m-1)=0 \;;;\; -(m-1)^2+1=0 \;;;$$

$$(m-1)^2=1 \;;;\; m^2-2m+1=1 \;;;\; m^2-2m=0 \;;;\; m(m-2)=0 \;\Rightarrow\; \underline{m_1=0} \;;;\; \underline{m_2=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \begin{Bmatrix} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \; Rango\; M = Rango\; M' = 3 = n^o \; incógnitas \; \Rightarrow \; Compatible\; determinado}}$$

$$Para\; m=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=-C_3\} \Rightarrow \underline{Rango\; M'=2}.$$

$$Para\; m=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \; \begin{Bmatrix} m = 0 \\ m = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \; Rango\; M = Rango\; M' = 2 < n^o \; incógnitas \; \Rightarrow \; Compatible\; indeterminado}}$$

b)

Resolvemos para m = 2. El sistema resulta $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $x=\lambda$, resulta:

$$\begin{cases} y-z=-\lambda \\ y+z=2-\lambda \end{cases} \Rightarrow 2y=2-2\lambda \;;;\; \underline{y=1-\lambda} \;;;\; y-z=-\lambda \;;;\; z=y+\lambda=1-\lambda+\lambda \;;;\; \underline{z=1}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{cases} ;\ \forall \lambda \in R}}$$

****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$:

a) Determinar la ecuación general del plano π paralelo a las rectas r y s y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Hallar el ángulo que forman r y s.

----

a)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (5,\ 3,\ 4)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,\ 0,\ 0)$.

La expresión general del plano pedido π es la siguiente:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 3 \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ \begin{vmatrix} y & z \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 4y - 3z = 0}}.$$

b)

El ángulo que forman dos rectas es el mismo que forman sus vectores directores.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(5,\ 3,\ 4)\cdot(3,\ 0,\ 0)}{\sqrt{5^2+3^2+4^2} \cdot \sqrt{3^2+0^2+0^2}} =$$

$$= \frac{15+0-0}{\sqrt{25+9+16} \cdot \sqrt{9}} = \frac{15}{\sqrt{50} \cdot 3} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\alpha = 45^{\circ}}.$$

<u>Las rectas r y s forman un ángulo de 45º.</u>

****