PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Se sabe que la gráfica de $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$ tiene una recta tangente horizontal en el punto P(2, 4). Hallar los valores de α y b.

Por contener f(x) al punto P(2, 4) es $f(2)=4 \Rightarrow \frac{a\cdot 2^2+b}{2}=4$;; $\underline{4a+b=8}$. (1)

La pendiente a una función en un punto el es valor de su derivada en ese punto y se sabe que el valor de la pendiente en el punto P(2, 0) es cero: $f'(2)=0$.

$$f'(x)=\frac{2ax\cdot x-(ax^2+b)}{x^2}=\frac{2ax^2-ax^2-b}{x^2}=\underline{\frac{ax^2-b}{x^2}}.$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow \frac{4a-b}{4}=0 \ ;; \ \underline{4a-b=0}. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2): $\left.\begin{matrix}4a+b=8\\4a-b=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$;; $\underline{\underline{b=4}}$.

****

2º) La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la siguiente función: $C(x)=1.500x+1.000.000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x)=4.000-x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?

El ingreso que se obtiene por la venta de x tabletas es: $I(x)=x\cdot P(x)=4.000x-x^2$.

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costos; la función que da el beneficio es:

$$B(x)=I(x)-C(x)=4.000x-x^2-(1.500x+1.000.000)=\underline{-x^2+2.500x-1.000.000}.$$

Una función tiene un máximo cuando su primera derivada es cero y el valor de la segunda derivada es negativo.

$$B'(x)=-2x+2.500=0 \;;;\; x-1.250=0 \Rightarrow \underline{x=1.250}.$$

$$B''(x)=-2<0 \Rightarrow \text{ Máximo, como cabía esperar.}$$

Hay que producir 1.250 tabletas para obtener el beneficio máximo.

****

3º) Estudiar el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{array}\right\}$ para los distintos valores del parámetro m y resolverlo en los casos en que sea posible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}=m(m)+1-(m+1)=m^2+1-m-1=m^2-m=m(m-1)=0 \Rightarrow \underline{m=0} \ y \ \underline{m=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \ m\neq 0 \text{ y } m\neq 1 \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M'=3=n^{o} \ incóg. \Rightarrow Compatible \ determinado}}$$

Se resuelve para m ≠ 0 por sustitución, $z=-my, \ x=1-y$:

$$(1-y)+(m+1)y+m(-my)=m+1 \ ;; \ 1-y+my+y-m^2y=m+1 \ ;; \ my-m^2y=m \ ;; \ y-my=1 \ ;;$$

$$y(1-m)=1 \Rightarrow \underline{y=\frac{1}{1-m}} \ ;; \ x=1-y=1-\frac{1}{1-m}=\frac{1-m-1}{1-m}=\underline{\frac{-m}{1-m}} \ ;; \ \underline{z=\frac{-m}{1-m}}.$$

$$Solución: \ \underline{\underline{x=z=\frac{m}{m-1}, \ y=\frac{-1}{m-1}}}.$$

$$Para \ m=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \ de \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \ m=0 \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M'=2<n^{o} \ incóg. \Rightarrow Compatible \ indeterminado}}$$

Para m = 0 el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ z=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ z=0 \end{array}\right\}$, de solución:

$$\underline{\underline{x=\lambda, \ y=1-\lambda, \ z=0, \ \forall\lambda\in R}}$$

$$Para \ m=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{F_3-F_1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{F_3-F_2} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \ de \ M'=3} \text{ y } \underline{Rango \ de \ M=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \ m=1 \Rightarrow Rango \ M=2\neq Rango \ M'=3 \Rightarrow Incompatible. \ No \ tiene \ solución}}$$

****

4º) Dados los puntos A(-1, 0, 3), B(2, 4, 1) y C(-4, 3, 1):

a) Estudiar si los puntos A, B y C están alineados.

b) Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento AB y que pasa por C. Expresarla como intersección de dos planos.

----

a)

Los puntos A(-1, 0, 3), B(2, 4, 1) y C(-4, 3, 1) determinan los vectores:

$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(2,\ 4,\ 1)-(-1,\ 0,\ 3)=(3,\ 4,\ -2)$.

$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-4,\ 3,\ 1)-(-1,\ 0,\ 3)=(-3,\ 3,\ -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{u}=(3,\ 4,\ -2)$ y $\overrightarrow{v}=(-3,\ 3,\ -2)$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes, lo que significa que:

Los puntos A, B y C no están alineados.

b)

La recta r, paralela al segmento AB tiene como vector director a $\overrightarrow{u}=(3,\ 4,\ -2)$.

Por pasar por C(-4, 3, 1), su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r\equiv\begin{cases}x=-4+3\lambda\\ y=3+4\lambda\\ z=1-2\lambda\end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es: $r\equiv\frac{x+4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{-2}$.

La recta r dada por unas ecuaciones implícitas es: $r\equiv\begin{cases}4x+16=3y-9\\ -2x-8=3z-3\end{cases}$, o mejor:

$$r\equiv\begin{cases}4x-3y+25=0\\ 2x+3z+5=0\end{cases}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

c) Calcular el valor de m de tal forma que $\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4} = 6$.

----

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeter. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeter. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeterminado.}$$

Multiplicando y dividiendo por la conjugada del numerador:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\left(1-x^2\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-1+x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}.$$

c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4} = 6 \;;; \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3-2mx^2-3mx}{x^2+4} = 6 \;;;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2mx^2+(2-3m)x+3}{x^2+4} = 6 \Rightarrow \frac{-2m}{1} = 6 \Rightarrow \underline{\underline{m=-3}}.$$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos x$, se pide:

a) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \pi$.

b) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = 2\pi$.

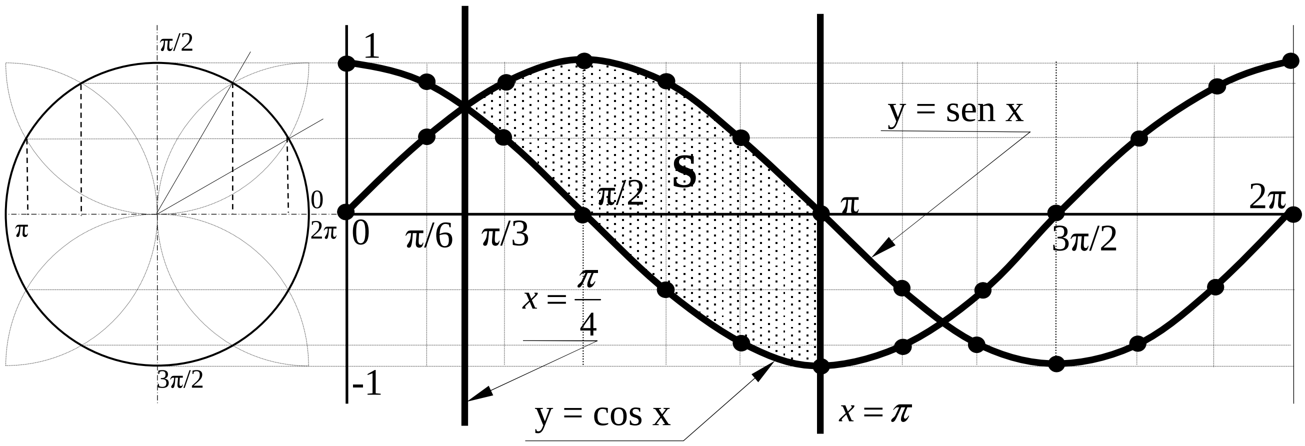
----

a)

Las gráficas de las funciones seno y coseno se diferencian en que tienen un desfase de $\frac{\pi}{2}$ (90º). (La palabra coseno se deriva de co‍mplemento del seno)

Se trata de dos funciones continuas cuyo dominio es R y el recorrido de ambas es [-1, 1]; el periodo de ambas es (2π).

Las gráficas de las funciones seno y coseno son las que se indican a continuación, expresadas en el intervalo de un giro.



Como puede observarse, en el intervalo comprendido por las dos rectas verticales $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \pi$, las ordenadas de la curva y = sen x son mayores que las de y = cos x.

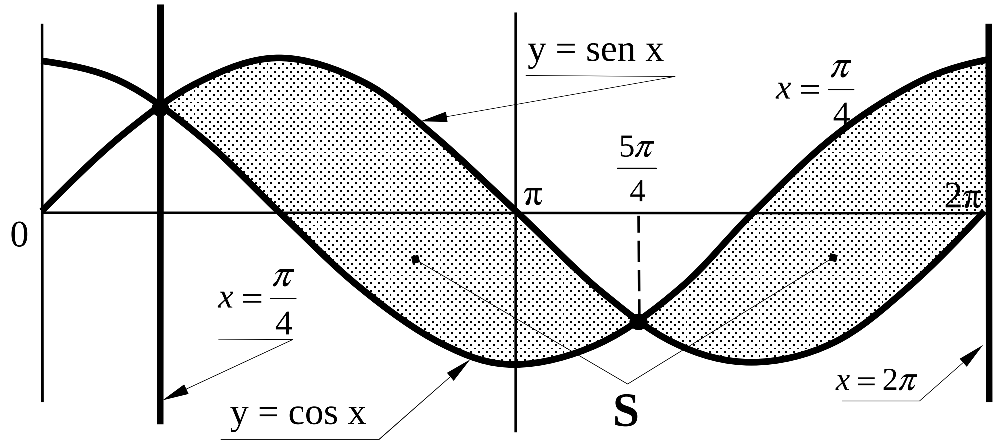
El área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (sen\ x - \cos x) \cdot dx = [-\cos x - sen\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = [\cos x + sen\ x]_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{4} \right) - (\cos \pi + sen\ \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1 + 0) = \sqrt{2} + 1 \cong \underline{\underline{2'41\ u^2 = S}}\ .$$

b)

Como puede observarse, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ las ordenadas de y = sen x son mayores que las de y = cos x y en el intervalo $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ las ordenadas de y = sen x son menores que las correspondientes ordenadas de y = cos x.



La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\ x - \cos\ x) \cdot dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos\ x - sen\ x) \cdot dx = [-\cos\ x - sen\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [sen\ x + \cos\ x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$

$$= [\cos\ x + sen\ x]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + [sen\ x + \cos\ x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4}\right) - \left(\cos\frac{5\pi}{4} + sen\frac{5\pi}{4}\right) + [\cos(2\pi) + sen(2\pi)] -$$

$$-\left(sen\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (1+0) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} =$$

$$= 1 + 3\sqrt{2} \cong \underline{\underline{5'24\ u^2 = S}}\ .$$

****

3º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y de dimensiones 2x3 tales que verifique el sistema matricial $\left.\begin{array}{r} 3X+Y=A \\ 4X+2Y=B \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r} 3X+Y=A \\ 4X+2Y=B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6X+2Y=2A \\ -4X-2Y=-B \end{array}\right\} \Rightarrow 2X=2A-B=2\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=2X \Rightarrow \underline{\underline{X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 3X+Y=A \\ 4X+2Y=B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -12X-4Y=-4A \\ 12X+6Y=3B \end{array}\right\} \Rightarrow 2Y=-4A+3B=-4\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 \\ -8 & -2 & -20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 6 & 3 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=2Y \Rightarrow \underline{\underline{Y=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}}}.$$

****

4º) Determinar el valor de α para que la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ sea paralela al siguiente plano: $\beta \equiv x - ay + 10z = -3$.

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

El vector normal del plano β es $\overrightarrow{n} = (1,\ -a,\ 10)$.

Un vector director de la recta es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 4j + k + 2k - 2i - j = -3i + 3j + 3k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ -1)}.$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (1,\ -1,\ -1) \cdot (1,\ -a,\ 10) = 0\ ;;\ 1 + a - 10 = 0 \Rightarrow \underline{a = 9}.$$

<u>La recta r y el plano β son paralelos para α = 9</u>.

****