# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE CANARIAS

# JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

## OPCIÓN A

1º) Determinar los valores de $a\ y\ b$ para que la función $f(x)$ definida de la siguiente forma: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & si\ \ x \le 2 \\ -x^2 + bx & si\ \ x > 2 \end{cases}$ sea derivable en todo $x \in R$.

---

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en $R$, excepto para $x = 2$; se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x = 2$.

Para que la función sea continua en $x = 2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguale al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 4x + a) = 4 + 8 + a = 12 + a = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-x^2 + bx) = -4 + 2b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$12 + a = -4 + 2b;\ \ a - 2b = -16.$ (1)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales son iguales en ese punto.

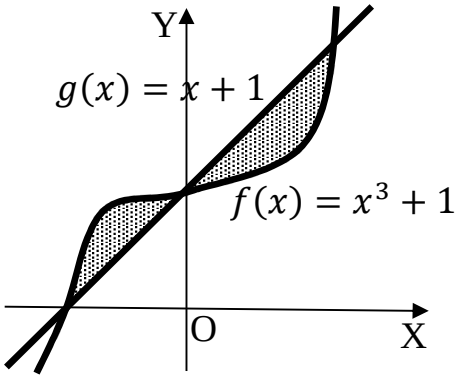
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & si\ \ x \le 2 \\ -2x + b & si\ \ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 4 + 4 = 8 \\ f'(2^+) = -4 + b \end{cases} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow$$

$\Rightarrow -4 + b = 8 \Rightarrow \underline{b = 12}.$ Sustituyendo el valor de $b$ en (1):

$a - 2 \cdot 12 = -16;\ \ a = -16 + 24\ \Rightarrow\ \underline{a = 8}.$

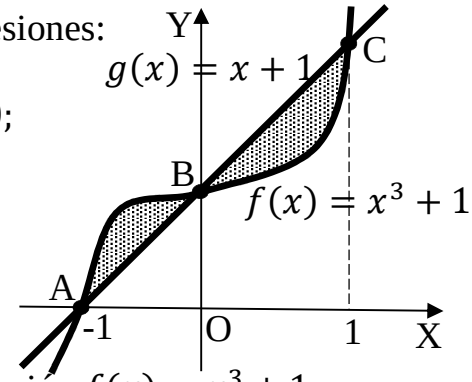
**********

2º) Calcular el área de la región sombreada en la figura adjunta, sabiendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica.




---

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:




$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1;\ x^3 - x = 0;$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \ \rightarrow A(-1, 0) \\ x_2 = 0 \ \rightarrow B(0, 1) \\ x_3 = 1 \ \rightarrow C(1, 2) \end{cases}.$$

En el intervalo $(-1, 0)$ las ordenadas de la función $f(x) = x^3 + 1$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x) = x + 1$ y en el intervalo $(0, 1)$ ocurre lo contrario.

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente.

$$S = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} [(x^3 + 1) - (x + 1)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [(x + 1) - (x^3 - 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 + 1 - x - 1) \cdot dx + \int_{0}^{1} (x + 1 - x^3 + 1) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x) \cdot dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x + 2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{3}{2}\, u^2.}$$

**********

3º) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2y = M^{-1} \end{array}\right\}.$$

---

La inversa de $M$ se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(M/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 7F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2y = M^{-1} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4X + 6Y = 2M \\ 9X - 6y = 3M^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 13X = 2M + 3M^{-1};$$

$$13X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2y = M^{-1} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6X + 9Y = 3M \\ -6X + 4y = -2M^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 13Y = 3M - 2M^{-1};$$

$$13Y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{Y = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}}.$$

**********

4º) Dado el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ y, se pide:

$a$) Escribir la ecuación de la recta $r$ en forma de ecuaciones continuas.

$b$) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 2, 1)$, es paralelo a la recta $r$ y perpendicular al plano $\pi$.

---

$a$)

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda;\ y = 1 - 2\lambda;\ z = 3 - x + y = 3 - \lambda + 1 - 2\lambda =$$

$$= 4 - 3\lambda \ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda. \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}.}$$

$b$)

Un vector director de la recta $r$ es $\overrightarrow{v_r} = (1, -2, -3)$.

Un vector normal del plano $\pi$ es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

La expresión general del plano $\beta$ pedido es la siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(x - 1) - 6(y - 2) + (z - 1) + 4(z - 1) + 3(x - 1) + (y - 1) = 0;$$

$$5(x - 1) - 5(y - 2) + 5(z - 1) = 0;\ \ (x - 1) - (y - 2) + (z - 1) = 0;$$

$$x - 1 - y + 2 + z - 1 = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \underline{\beta \equiv x - y + z = 0}.$$

**********

OPCIÓN B

1º) Calcular los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\ (x^2)}$. $\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$.

---

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\ (x^2)}=\frac{e^0+e^{-0}-2\cos 0}{sen\ 0}=\frac{1+1-2\cdot 1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{2x\cdot cos\ (x^2)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x^2)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{x}=$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^0-e^{-0}+2sen\ 0}{0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-1+2\cdot 0}{0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cdot cos\ x}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1+2\cdot 1}{1}=\frac{4}{2}=2.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\ (x^2)}=2.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=\frac{\sqrt{4+0}-2-\frac{0}{4}}{0^2}=\frac{2-2-0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-0-\frac{1}{4}}{2x}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+0}}-0-\frac{1}{4}}{2\cdot 0}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{x+4}}{2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(4+x)\cdot\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{32}.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=-\frac{1}{32}.}$$

Otra forma de hacer este ejercicio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2}=\frac{4\sqrt{4+0}-8-0}{4\cdot 0^2}=\frac{4\cdot 2-8}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-(8+x)}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[4\sqrt{4+x}-(8+x)\right]\cdot\left[4\sqrt{4+x}+(8+x)\right]}{4x^2\cdot\left[4\sqrt{4+x}+(8+x)\right]}=$$

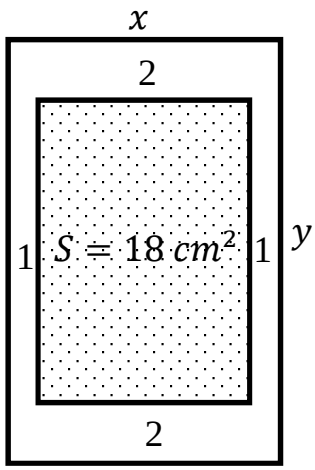
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4\sqrt{4+x}\right)^2-(8+x)^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{16(4+x)-(64+16x+x^2)}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{64+16x-64-16x-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{4\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \frac{-1}{4\cdot(4\cdot 2+8+0)} = \underline{-\frac{1}{32}}.$$

**********

2º) Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm$^2$. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima.

---




La superficie total es $S = x \cdot y$. (*)

También puede expresarse la superficie total de la forma siguiente:

$$S = 18 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot (y - 4).$$

$$18 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot (y - 4) = x \cdot y;$$

$$18 + 4x + 2y - 8 = x \cdot y; \quad 10 + 4x = x \cdot y - 2y;$$

$$y(x - 2) = 10 + 4x \Rightarrow y = \frac{10+4x}{x-2}.$$

Sustituyendo en (*) el valor hallado de $y$: $S(x) = x \cdot \frac{4x+10}{x-2} = \frac{4x^2+10x}{x-2}$.

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{(8x+10)\cdot(x-2)-(4x^2+10x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{8x^2-16x+10x-20-4x^2-10x}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0; \quad 4x^2 - 16x - 20 = 0; \quad x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$$

La solución negativa carece de sentido, es para mínimo. La solución es $x = 5$.

$$y = \frac{10+4\cdot 5}{5-2} = \frac{10+20}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ cuando\ las\ dimensiones\ del\ teléfono\ son\ 10 \times 5\ cm.}$

**********

3º) Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

---

$$A^{-1}XA = B;\ \ A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1};\ \ I \cdot X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1}.$$

$$\underline{X = A \cdot B \cdot A^{-1}}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1.\ \ A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}.$$

**********

4º) Dados la recta $r \equiv x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el planos $\pi \equiv 2x + y + z = 9$, se pide:

$a$) Calcular el valor del parámetro $m$ para que la recta $r$ sea paralela al plano $\pi$.

$b$) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta $r$ y el plano $\pi$.

---

$a$)

La recta $r$ es paralela al plano $\pi$ cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

Un vector director de $r$ es $\overrightarrow{v_r} = \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right)$.

Un vector normal de $\pi$ es $\vec{n} = (2, 1, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right) \cdot (2, 1, 1) = 0; \;\; 2 + 1 - \frac{3}{m} = 0; \;\; 3m - 3 = 0;$$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1.$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ cuando\ m = 1.}$$

$b$)

Para $m = 2$ la recta es $r \equiv x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{\frac{-3}{2}}$ o mejor $r \equiv x = y + 1 = \frac{2z - 11}{-3}$.

La expresión de $r$ por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y + z = 9 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda + (-1 + \lambda) + \left(\frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) = 9;$$

$$2\lambda - 1 + \lambda + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda = 9; \;\; 3\lambda + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda = 10; \;\; 6\lambda + 11 - 3\lambda = 20; \;\; 3\lambda = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 + 3 = 2 \\ z = \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P(3, 2, 1)}.$$

**********