PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Calcular el valor de los parámetros $c\ y\ d$ sabiendo que la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$.

Por contener $f(x)$ al punto $P(1, -2)$ es $f(1) = -2$:

$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + c + d = -2;\ \ 2 - 1 + c + d = -2;\ \ c + d = -3.$ (1)

La pendiente de la recta tangente $y = 5x - 7$ es $m = 5$.

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto, por lo cual es $f'(1) = 5$:

$f'(x) = 6x^2 - 2x + c.$

$f'(1) = 5 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c = 5;\ \ 6 - 2 + c = 5;\ \ 4 + c = 5\ \Rightarrow\ \underline{c = 1}.$

Sustituyendo en (1) el valor de $c = 1$:

$c + d = -3;\ \ 1 + d = -3\ \Rightarrow\ \underline{d = -4}.$

$$\underline{f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4}.$$

****

2º) Resolver las siguientes integrales: $a)\ I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{[L(2x)]^2}{3x} \cdot dx.$ $\quad b)\ I = \int \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx.$

$a)$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{[L(2x)]^2}{3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} L(2x) = t & x = \frac{e}{2} \to t = 1 \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt & x = \frac{1}{2} \to t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 t^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{9} \cdot [t^3]_0^1 = \frac{1}{9} \cdot (1^3 - 0^3) = \frac{1}{9}.$$

$$\underline{I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{[L(2x)]^2}{3x} \cdot dx = \frac{1}{9}.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(3x^2 + 5 + x^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} + 5x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{3x^4+5x^2+\sqrt{x}}{x^2} dx = x^3 + 5x - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C.}$$

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$:

a) Calcular el valor de x para que se cumpla: $A+B+C^2=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A\cdot X+C^2=3I$.

----

a)

$$A+B+C^2=3I;\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3I;$$

$$\begin{pmatrix}2 & x\\ x & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=3I;\ \begin{pmatrix}3 & x-2\\ x-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{x=2}.$$

b)

$$A\cdot X+C^2=3I;\ \ A\cdot X=3I-C^2=M;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot M;$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot M\ \Rightarrow\ \underline{X=A^{-1}\cdot M}.$$

$$M=3I-C^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix};\ \ |A|=-1;\ \ A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix};\ \ Adj.\,de\ A^t=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=A.$$

$$X=A^{-1}\cdot M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$$\underline{X=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}}.$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ y, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π.

b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r.

----

a)

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, cuando su producto escalar es 0.

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (1, 3, -2)$.

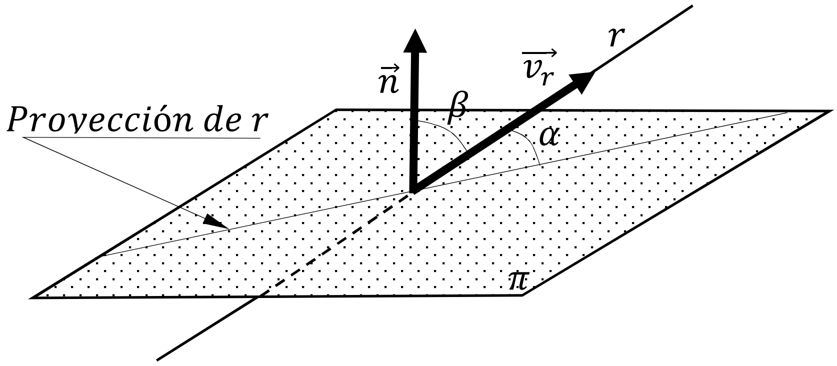
Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (5, a, 4)$.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, 3, -2) \cdot (5, a, 4) = 0;\ \ 5 + 3a - 8 = 0;\ \ 3a = 3 \Rightarrow \underline{a = 1}$.

b)

Para $a = 0$ el vector normal del plano π es $\vec{n} = (5, 0, 4)$.

El vector director de r y el vector normal de π son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual son secantes.



Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|} = sen\ \alpha.$

$sen\ \alpha = \frac{(5,0,4)\cdot(1,3,-2)}{\sqrt{5^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{5+0-8}{\sqrt{25+16}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \frac{-3}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{574}} = \frac{-3}{23{,}9583} =$

$= -0{,}1252 \ \Rightarrow\ \beta = arc\,\mathrm{sen}\,(-0{,}1252) = 7°\ \ 11'\ 36''.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 7°\ \ 11'\ 36''}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$, se pide:

$a)$ Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

$b)$ Calcular los máximos y mínimos relativos.

$a)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} - x^2 \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} = \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}} = 0; \;\; 2x(1-x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1.$$

Por ser $e^{x^2} > 0, \forall x \in R$, $f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea el numerador de su expresión, que por ser una expresión polinómica, sus tres raíces dividen el dominio de la función, que es R, en cuatro intervalos donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Los intervalos mencionados son $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$.

Considerando el valor $2 \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(2) = \frac{4(1-4)}{e^4} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: (-\infty, -1) \cup (0, 1).}$$

$$\underline{Decrecimiento: (-1, 0) \cup (1, +\infty).}$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2-6x^2) \cdot e^{x^2} - 2x(1-x^2) \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{2-6x^2-4x^2(1-x^2)}{e^{x^2}} = \frac{2-6x^2-4x^2+4x^4}{e^{x^2}} =$$

$$= \frac{4x^4-10x^2+2}{e^{x^2}} = \frac{2(2x^4-5x^2+1)}{e^{x^2}}.$$

$$f''(-1) = \frac{2(2\cdot 1-5\cdot 1+1)}{e^{1^2}} = \frac{-4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{(-1)^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(-1, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$f''(0) = \frac{2(2\cdot 0-5\cdot 0+1)}{e^{0^2}} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0^2}{e^{0^2}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0,0)}.$$

$$f''(1) = \frac{2(2\cdot 1-5\cdot 1+1)}{e^{1^2}} = \frac{-4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

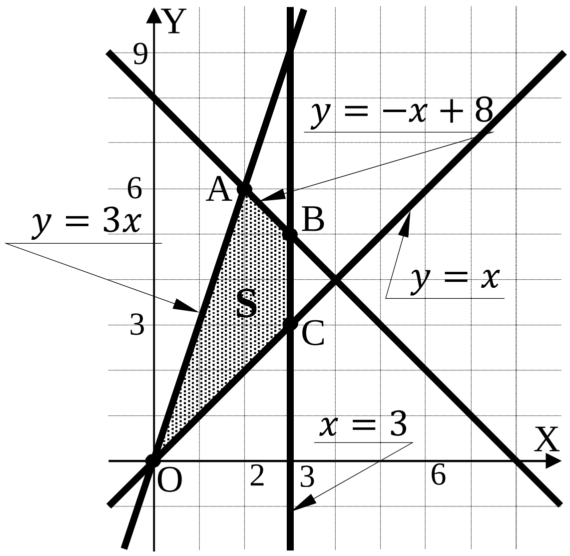
$$f(1) = \frac{1^2}{e^{1^2}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: B\left(1, \frac{1}{e}\right)}.$$

Estos cálculos se simplifican teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x) = f(x)$.

****

2º) Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x;\;\; y = x;\;\; y = -x + 8;\;\; x = 3.$$



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que aparece sombreada en la figura, y que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 3x \cdot dx + \int_2^3 (-x + 8) \cdot dx + \int_3^0 x \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2} + 8x\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^0 =$$

$$= \left[\left(\frac{3\cdot 2^2}{2}\right) - 0\right] + \left[\left(-\frac{\cdot 3^2}{2} + 8\cdot 3\right) - \left(-\frac{\cdot 2^2}{2} + 8\cdot 2\right)\right] + \left(0 - \frac{3^2}{2}\right) =$$

$$= 6 - \frac{9}{2} + 24 + 2 - 16 - \frac{9}{2} = 32 - 16 - 9 = 32 - 25 = 7.$$

$$\underline{S = 7\, u^2}.$$

****

3º) Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+kz=1 \\ kx+2y-z=-2 \\ y-3z=-3 \end{array}\right\}.$

$a)$ Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k.

$b)$ Resolverlo para $k=2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ k & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-12+k^2+2+3k=0;\;\; k^2+3k-10=0;$$

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}\Rightarrow k_1=-5, k_2=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} k\neq -5 \\ k\neq 2 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=-5\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-12-5+4-15=-28\neq 0\ \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ k=-5\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ k=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-12+2+4+6=0\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $k=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r}2x+y+2z=1\\2x+2y-z=-2\\y-3z=-3\end{array}\right\}$., que es compatible indeterminado.

Para resolverlo se desprecia una de las ecuaciones (primera) y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo, $z=\lambda$.

$\left.\begin{array}{r}2x+2y=-2+\lambda\\y=-3+3\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow 2x+2(-3+3\lambda)=-2+\lambda;\;\; 2x-6+6\lambda=-2+\lambda;$

$2x=4-5\lambda;\;\; x=2-\frac{5}{2}\lambda.$

$$\underline{Solución: x=2-\frac{5}{2}\lambda;\; y=-3+3\lambda;\;\; z=\lambda;\; \forall\lambda\in R.}$$

****

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$; $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, determinar:

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2, 2, 1)$.

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1, 1, -1)$.

----

a)

Un vector normal del plano π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 0)$.

Un vector de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano π_1, por lo cual, $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 0)$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}.}$$

b)

El plano π_3 pedido es perpendicular a los planos $\overrightarrow{\pi_1}$ y $\overrightarrow{\pi_2}$ por lo cual tiene como vectores directores a los vectores normales de los planos $\overrightarrow{\pi_1}$ y $\overrightarrow{\pi_2}$.

$\overrightarrow{n_2} = (2, 1, -1)$.

$$\pi_3(A;\ \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-1) + (z+1) + 2(z+1) + (y-1) = 0$; $(x-1) + (y-1) + 3(z+1) = 0$;

$x - 1 + y - 1 + 3z + 3 = 0$.

$$\underline{\pi_3 \equiv x + y + 3z + 1 = 0.}$$

****