PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CANARIAS

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

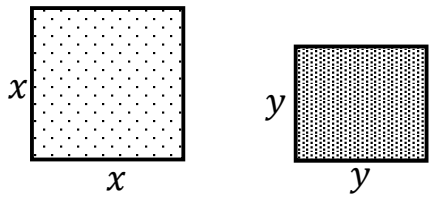
MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Los dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm?

Sean x e y los lados de los cuadrados cuyos precios son de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente.



El coste total de las telas es el siguiente:

$C = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2.$ (*)

Teniendo en cuenta que el total del perímetro tiene que ser de 100 cm:

$4x + 4y = 100;\ \ x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - x.$

Sustituyendo el valor de y obtenido en la expresión (*):

$C(x) = 2x^2 + 3 \cdot (25 - x)^2 = 2x^2 + 3 \cdot (625 - 50x + x^2) =$

$= 2x^2 + 1.875 - 150x + 3x^2 = 5x^2 - 150x + 1.875.$

Para que el coste sea mínimo es necesario que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$C'(x) = 10x - 150.$ $C''(x) = 10 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 150 = 0;\ \ 10(x - 15) = 0;\ \ x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15.$$

$y = 25 - x = 25 - 15 = 10.$

$\underline{Coste\ mínimo:\ \ lado\ 15\ cm\ para\ el\ de\ 2\ euros\ y\ 10\ cm\ para\ el\ de\ 3\ euros.}$

****

2º) Determinar una matriz X que verifique la ecuación $AB - CX = I$ siendo las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B - C \cdot X = I;\ \ C \cdot X = A \cdot B - I;\ \ C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I);$$

$I \cdot X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I) \Rightarrow \underline{X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I)}$.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \qquad C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 6 & -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 6 & -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 11 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Estudiar la posición relativa de los planos: $\begin{cases} \alpha \equiv 2x + 3y - 5z + 7 = 0 \\ \beta \equiv 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \gamma \equiv 7x + 8y - 7z + 13 = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.
(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.
(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)
(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.
(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)
(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -28 - 120 + 63 + 70 - 48 + 63 = 196 - 196 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M = 2.$

$$Rang\ M' \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & -7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = 2F_1 + F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

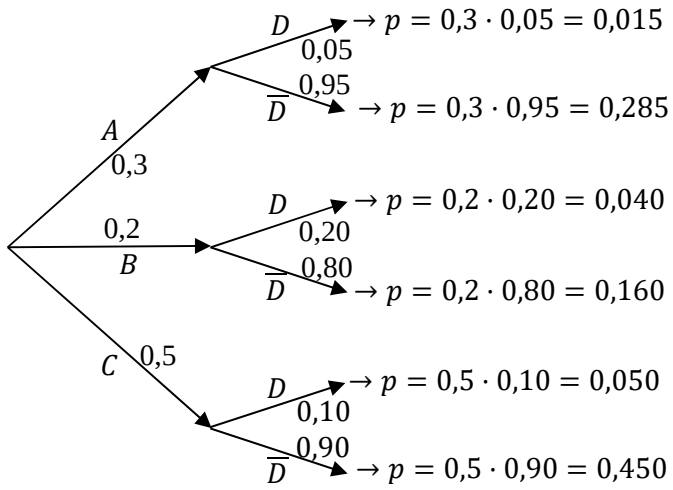
$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$

****

4º) Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30 %, 20 % y 50 % de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5 % de los motores producidos por A, el 20 % de los producidos por B y el 10 % de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C?



a)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}20 + 0{,}5 \cdot 0{,}10 = 0{,}015 + 0{,}040 + 0{,}050 = \underline{0{,}105}.$$

b)

$$P = P(D/A \cup B) = \frac{P(D \cap A \cup B)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}20}{0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}20 + 0{,}5 \cdot 0{,}10} = \frac{0{,}015 + 0{,}040}{0{,}015 + 0{,}040 + 0{,}050} = \frac{0{,}055}{0{,}105} = \underline{0{,}5238}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto $P(2,8)$.

Por contener al punto $P(2,8)$ es $f(2) = 8$:

$$f(2) = a\sqrt{3\cdot 2+3} + b\sqrt{2-1} = a\sqrt{9} + b\sqrt{1} = 3a + b = 8. \quad (1)$$

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto:

$$f'(x) = a\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x+3}} + b\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3a}{2}\cdot(3x+3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f''(x) = \frac{3a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(3x+3)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot 3 + \frac{b}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot 1 =$$

$$= -\frac{9a}{4}\cdot(3x+3)^{-\frac{3}{2}} - \frac{b}{4}\cdot(x-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{9a}{4}\cdot\frac{1}{(3x+3)\sqrt{3x+3}} - \frac{b}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow -\frac{9a}{4}\cdot\frac{1}{(3\cdot 2+3)\sqrt{3\cdot 2+3}} - \frac{b}{4}\cdot\frac{1}{(2-1)\sqrt{2-1}} = 0;\ \ -\frac{9a}{4}\cdot\frac{1}{9\cdot\sqrt{9}} - \frac{b}{4}\cdot\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}} = 0;$$

$$-\frac{9a}{4}\cdot\frac{1}{27} - \frac{b}{4} = 0;\ \ \frac{a}{12} + \frac{b}{4} = 0;\ \ a + 3b = 0. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 8 \\ a + 3b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3a - b = -8 \\ 3a + 9b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8b = -8 \ \Rightarrow\ \underline{b = -1}.$$

$$a + 3b = 0;\ a - 3 = 0 \Rightarrow\ \underline{a = 3}.$$

****

2º) Considerar el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+ky+z=2 \\ x+y+kz=k-1 \end{array}\right\}$:

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema para $k=1$.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k & k-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=k^2+2+1-k-1-2k=0;\ \ k^2-3k+2=0;$$

$$k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow k_1=1, k_2=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} k\neq 1 \\ k\neq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1+2-4-3=-4\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ k=2\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

b)

Para $k=1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$,

que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -\lambda \\ 2x + y = 2 - \lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x - y = \lambda \\ 2x + y = 2 - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2;\ \ y = -2 - \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 2,\ y = -2 - \lambda,\ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

3º) Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que r_1 y r_2 son coplanarias.

b) Hallar la ecuación del plano π que determinan.

---

a)

Un punto y un vector director de r_1 son $P(1, 1, -2)$ y $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 2)$.

Un punto y un vector director de r_2 son $Q(-5, 3, -4)$ y $\overrightarrow{v_2} = (4, -2, 3)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{QP} = (6, -2, 2)$.

Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias es equivalente a demostrar que los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{QP}\}$ son linealmente dependientes (están en un mismo plano).

Los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{QP}\}$ son linealmente dependientes cuando el rango del determinante que forman es cero.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{QP}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 16 - 18 + 24 + 6 + 8 = 0.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ son\ coplanarias.}$$

b)

La ecuación general del plano π que determinan es la siguiente:

$$\pi\{P;\ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-1) + 8(y-1) - 2(z+2) + 4(z+2) + 4(x-1) - 3(y-1) = 0;$$

$$(x-1) + 5(y-1) + 2(z+2) = 0;\ \ x - 1 + 5y - 5 + 2z + 4 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + 5y + 2z - 2 = 0.}$$

****

4º) El 30 % de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:

a) Tres o menos personas.

b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado.

---

a)

Se trata de una distribución normal de las siguientes características:

$p = 0{,}3;\ \ q = 0{,}7;\ \ n = 10.$

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = \binom{10}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8 + \binom{10}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^9 +$$

$$+ \binom{10}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{10} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}082354 + \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}057648 +$$

$$+10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}040354 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}028247 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 6} \cdot 0{,}00222 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2} \cdot 0{,}00519 + 0{,}121061 + 0{,}028247 =$$

$$= 120 \cdot 0{,}00222 + 45 \cdot 0{,}00519 + 0{,}149308 = 0{,}2664 + 0{,}2336 + 0{,}1493 =$$

$$= \underline{0{,}6493}.$$

b)

$$P = \binom{10}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}028247 = \underline{0{,}0282}.$$

****