# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE CANARIAS

# EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones:
Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Bloque 1.- Análisis.

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & x\le 0 \\ 10x^2+x+b & x>0 \end{cases}$. Calcular los valores de $a\ y\ b$ para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

----------

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a}{2x-4}=-\frac{a}{4}=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(10x^2+x+b)=b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow -\frac{a}{4}=b. \quad (*)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-ax-a}{2\cdot(x-2)^2} \;\; si\ x<0 \quad (*) \\ 20x+1\ si\ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \;\Rightarrow f'(0) = \begin{cases} -\frac{a}{8} \;\; si\ \ x<0 \\ 1\ \ si\ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow -\frac{a}{8} = 1 \Rightarrow \underline{a=-8}$.

(*) $g(x) = \frac{x^2+a}{2x-4} \Rightarrow g'(x) = \frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2-a}{2\cdot(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-a}{2\cdot(x-2)^2}$.

Sustituyendo en (*): $-\frac{a}{4} = b$; $\ -\frac{-8}{4} = b \Rightarrow \underline{b=2}$.

La función y su derivada son:

$$\underline{f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8}{2x-4} \;\; si\ \ x \leq 0 \\ 10x^2+x+2\ \ si\ \ x>0 \end{cases}} \quad y \quad \underline{f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+8}{2\cdot(x-2)^2} \;\; si\ x<0 \\ 20x+1\ si\ \ x \geq 0 \end{cases}}.$$

**********

2º) Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$;  $g(x) = 4 - 4x$.

$a)$ Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

$b)$ Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

----------

$a)$

La función $f(x) = x^2 - 4x$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de $x^2$. Su vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 \Rightarrow V(2, -4).$$

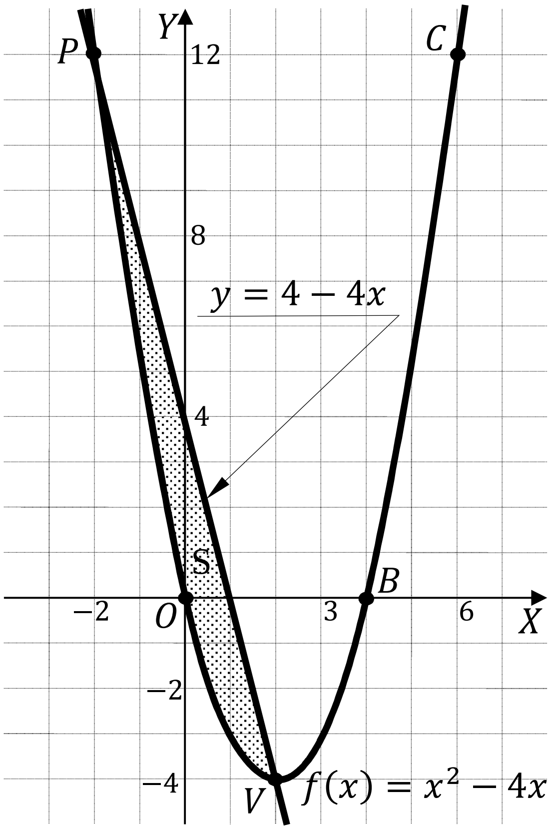
Otros puntos de la parábola son los siguientes: $B(4, 0)$ y $C(6, 12)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x = 4 - 4x;\ x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow P(-2, 12) \\ x_2 = 2 \rightarrow V(2, -4) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.




$b)$

Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo de la superficie a calcular , que es $(-2, 2)$, la superficie es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} [(4 - 4x) - (x^2 - 4x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} \Rightarrow \underline{S = \frac{32}{3}\ u^2 \cong 10{,}67\ u^2}\ .$$

**********

3º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

$a$) Sea la matriz $M=A+c\cdot B$, donde $c$ es un número real cualquiera. Calcular los valores de $c$ de forma que $Rang\ M=1$.

$b$) Sea la matriz $D=A^2+B\cdot A$. Averiguar la matriz $X$ que cumple la siguiente ecuación matricial: $D\cdot X=-30\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

----------

$a$)

$$M=A+c\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & 0\\ 4c & -c\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=\begin{pmatrix}c+1 & -1\\ 4c+4 & 2-c\end{pmatrix}.$$

Por tener la matriz $M$ elementos distintos de cero su rango será uno cuando su determinante sea cero:

$$|M|=\begin{vmatrix}c+1 & -1\\ 4c+4 & 2-c\end{vmatrix}=2c-c^2+2-c+4c+4=0;\ \ c^2-5c-6=0;$$

$$c=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm7}{2}\Rightarrow c_1=-1, c_2=6.$$

$\underline{El\ rango\ de\ la\ matriz\ M\ es\ 1\ para\ c=-1\ y\ para\ c=6.}$

$b$)

$$D\cdot X=-30\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix};\ \ D^{-1}\cdot D\cdot X=-30\cdot D^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix};$$

$$I\cdot X=-30\cdot D^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow X=-30\cdot D^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.\quad (*)$$

$$D=A^2+B\cdot A=A\cdot A+B\cdot A=(A+B)\cdot A=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}\right]\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 8 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow D=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 12 & -6\end{pmatrix}.$$

$$D=\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 12 & -6\end{vmatrix}=12+48=60;\ D^t=\begin{pmatrix}-2 & 12\\ -4 & -6\end{pmatrix};\ Adj.de\ D^t=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -12 & -2\end{pmatrix}.$$

$$D^{-1}=\frac{Adj.de\ D^t}{|D|}=\frac{\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -12 & -2\end{pmatrix}}{60}\ \Rightarrow\ D^{-1}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -12 & -2\end{pmatrix}=-\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & 1\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de $D^{-1}$ en la expresión (*):

$$X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -30 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}}.$$

**********

4º) En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17.500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2.500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain?

----------

Sean $x, y, z$ el número de puntos acumulados de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=17.500 \\ \frac{x}{2}=z+2.500 \\ y=2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=17.500 \\ x-2z=5.000 \\ y-2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17.500 \\ 1 & 0 & -2 & 5.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17.500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 5.000 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17.500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -12.500 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 17.500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -12.500 \end{pmatrix} \Rightarrow -5z = 12.500 \Rightarrow z = 2.500.$$

$$\Rightarrow y = 2z = 5.000; \;\; x+y+z = 17.500; \;\; x = 17.500 - 5.000 - 2.500 = 10.000.$$

$$\underline{Lovelace\ anot\acute{o}\ 10.000\ puntos; Noerther, 5.000\ y\ Germain, 2.500.}$$

**********

Bloque 3.- Geometría.

5º) Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r \equiv 5 - x = y - 3 = 5 - z; \;\; \pi \equiv 3x - 4y - 8z + 35 = 0.$$

$a$) Comprobar que la recta $r$ y el plano $\pi$ se cortan en un punto. Averiguar dicho punto.

$b$) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2, 2, 2)$, paralelo a la recta $r$, y perpendicular al plano $\pi$.

----------

$a$)

La expresión de la recta $r \equiv 5 - x = y - 3 = 5 - z$ dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 5 - x = 5 - z \\ y - 3 = 5 - z \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 8 \end{cases}.$$

La recta y el plano $\pi$ se cortan en un punto cuando el sistema que forman es compatible determinado.

La recta y el plano $\pi$ determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ y + z = 8 \\ 3x - 4y - 8z = -35 \end{array}\right\}$, cuya matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ se\ cortan\ en\ un\ punto}.$$

El punto de corte es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ y + z = 8 \\ 3x - 4y - 8z = -35 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = z \\ y = 8 - z \end{array}\right\} \Rightarrow 3z - 4 \cdot (8 - z) - 8z = -35;$$

$3z - 32 + 4z - 8z = -35; \; -z = -3; \; z = x = 3; \; y = 8 - 3 = 5 \Rightarrow \underline{P(3, 5, 3)}$.

$b$)

Un vector director de $r$ se deduce de sus ecuaciones continuas: $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 1)$ y un vector normal del plano es $\vec{n} = (3, -4, -8)$.

La ecuación general del plano $\beta$ pedido es la siguiente:

$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$8(x-2) + 3(y-2) - 4(z-2) + 3(z-2) + 4(x-2) + 8(y-2) = 0;$$

$$12(x-2) + 11(y-2) - (z-2) = 0;\ 12x - 24 + 11y - 22 - z + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 12x + 11y - z - 44 = 0}.$$

**********

6º) Dado el plano $\pi \equiv -x + 3y + 2z + 5 = 0$ y las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2} = y + 2 = 1 - z$ y $s \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$.

$a$) Sea A el punto de intersección de las rectas $r$ $y$ $s$. Hallar la ecuación de la recta $t$ que es perpendicular al plano $\pi$ y que pasa por A.

$b$) Calcular el ángulo que forman las rectas $r$ $y$ $s$.

----------

$a$)

Las expresiones de las rectas $r$ $y$ $s$ por unas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}. \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 6\mu \\ y = -2\mu \\ z = \mu \end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 5 + 2\lambda = -1 + 6\mu \\ -2 + \lambda = -2\mu \\ 1 + \lambda = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + \lambda = -2 \cdot (1 + \lambda);\ -2 + \lambda = -2 - 2\lambda;$$

$3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$

El punto de corte es $A(5, -2, 1)$. Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -3, -2)$.

La recta $t$ expresada por unas ecuaciones paramétricas es: $t \equiv \begin{cases} x = 5 + \varphi \\ y = -2 - 3\varphi \\ z = 1 - 2\varphi \end{cases}.$

$b$)

Los vectores directores de $r$ $y$ $s$ son $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (6, -2, 1)$.

El ángulo que forman dos rectas es el menor de los dos ángulos que forman sus vectores directores.

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = |\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|} = \frac{|(2,1,-1)\cdot(6,-2,1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{6^2+(-2)^2+1^2}} =$$

$$= \frac{|12-2-1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{36+4+1}} = \frac{9}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{246}} = 0{,}5738 \Rightarrow \underline{\beta = 54°\ 59'}.$$

**********

Bloque 4.- Probabilidad.

7º) Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

$a)$ Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20 %.

$b)$ Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?

$c)$ ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

----------

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 20;\ \ p = 0{,}01;\ \ q = 0{,}99.$ La fórmula de la probabilidad de que de $n$ elementos $r$ sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$a)$

$$P = P(1) + P(2) = \binom{20}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{18} =$$

$$= 20 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}8262 + \frac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}8345 =$$

$$= 0{,}1652 + 190 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}8345 = 0{,}1652 + 0{,}0159 = \underline{0{,}1811 = 18{,}11\ \%}.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ 1\ o\ 2\ arandelas\ defectuosas\ es\ menor\ del\ 20\ \%.}$$

$b)$

El suceso contrario a “que se encuentre al menos una arandela defectuosa” es “que no haya ninguna arandela defectuosa”, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{20} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8179 = \underline{0{,}1821}.$$

$c)$

Siendo $q = 0{,}99 \Rightarrow n = N \cdot q = 200 \cdot 0{,}99 = 198.$

$$\underline{El\ número\ esperado\ de\ arandelas\ no\ defectuosas\ es\ de\ 198.}$$

**********

8º) Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

$a$) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.

$b$) Correos afirma que: “Menos del 40 % de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos”. ¿Es correcta la afirmación?

----------

$a$)

$Datos$: $\mu = 7{,}5;\ \ \sigma = 2.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(7{,}5;\ 2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-7{,}5}{2}$.

$P = P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-7{,}5}{2}\right) = P\left(Z > \frac{1{,}5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = \underline{0{,}2266 = 22{,}66\ \%}.$

$b$)

$P = P(7 \leq Z \leq 10) = P\left(\frac{7-7{,}5}{2} \leq Z \leq \frac{10-7{,}5}{2}\right) = P\left(\frac{-0{,}5}{2} \leq Z \leq \frac{2{,}5}{2}\right) =$

$= P(-0{,}25 \leq Z \leq 1{,}25) = P(Z \leq 1{,}25) - [1 - P(Z \leq 0{,}25)] =$

$= P(Z \leq 1{,}25) - 1 + P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}8944 - 1 + 0{,}5987 = 1{,}4931 - 1 =$

$= \underline{0{,}4931 = 49{,}31\ \%}.$

$\underline{La\ afirmación\ es\ incorrecta;\ suponen\ el\ 49{,}31\ \%}.$

**********