PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones:

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Bloque 1.- Análisis.

1º) Dada la función $f(x)=\frac{ax^2-2}{b-x}$, donde $a\ y\ b$ son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros $a\ y\ b$ que verifican que $f(-2)=2$ y que $f(x)$ sea continua en $R-\{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a=-1\ y\ b=-3$.

----

a)

$$f(-2)=\frac{a\cdot(-2)^2-2}{b-(-2)}=2;\ \ \frac{4a-2}{b+2}=2;\ \ 4a-2=2b+4;\ \ 4a-2b=4+2;$$

$4a-2b=6;\ \ 2a-b=3.$ (1)

Si la función no es continua para $x=5 \Rightarrow b-5=0;\ \ \underline{b=5}$.

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de b: $2a-5=3;\ \ 2a=8 \Rightarrow \underline{a=4}$.

La función resulta: $f(x)=\frac{4x^2-2}{5-x}$.

$$f'(x)=\frac{8x\cdot(5-x)-(4x^2-2)\cdot(-1)}{(5-x)^2}=\frac{40x-8x^2+4x^2-2}{(5-x)^2}=\frac{-4x^2+40x-2}{(5-x)^2}=-\frac{4x^2-40x+2}{(5-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x)=\frac{-2\cdot(2x^2-20x+1)}{(5-x)^2}}.$$

$b)$

Para $a = -1$ y $b = -3$ la función es $f(x) = \frac{-x^2-2}{-3-x} = \frac{x^2+2}{x+3}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+2}{x+3} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x + 3 = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -3\ es\ asíntota\ vertical}.$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

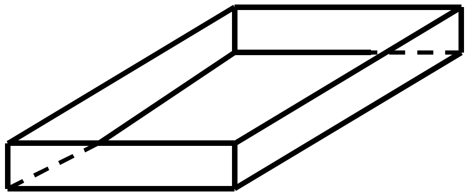
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+2}{x+3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2}{x^2+3x} = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2}{x+3} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2-x^2-3x}{x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x+2}{x+3} = -3.$$

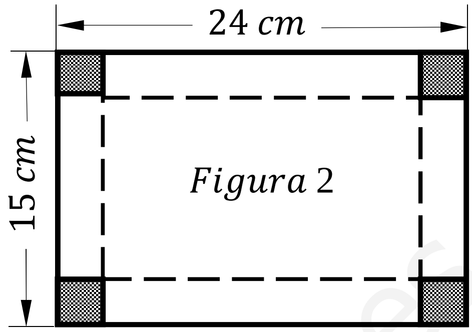
$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x - 3}.$$

****

2º) Se desea construir una caja sin tapa superior (ver figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.



$Figura\ 1$



$Figura\ 2$

Siendo x la altura de la caja, de la observación de la figura 1:

$V(x) = (15 - 2x) \cdot (24 - 2x) \cdot x = 2x \cdot (15 - 2x) \cdot (12 - x).$

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$V'(x) = 2 \cdot (15 - 2x) \cdot (12 - x) - 4x \cdot (12 - x) - 2x \cdot (15 - 2x) =$

$= 2 \cdot (2x^2 - 39x + 180) - 48x + 4x^2 - 30x + 4x^2 =$

$= 4x^2 - 78x + 360 + 8x^2 - 78x = 12x^2 - 156x + 360 = 12 \cdot (x^2 - 13x + 30).$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12 \cdot (x^2 - 13x + 30) = 0 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0;$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 10.$

La solución $x = 10$ carece de sentido por ser imposible la construcción; se trata de un mínimo. La solución lógica de máximo es para $x = 3$. Se comprueba a continuación:

$V''(x) = 12 \cdot (2x - 13).$

$V''(3) = 12 \cdot (6 - 13) = -84 < 0 \ \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3.$

$V''(10) = 12 \cdot (20 - 13) = 84 > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 10.$

$\underline{El\ volumen\ de\ la\ caja\ es\ máximo\ cortando\ un\ 3\ cm\ de\ cada\ esquina.}$

$\underline{Las\ dimensiones\ de\ la\ caja\ son\ 3\ cm \times 9\ cm \times 18\ cm}.$

$Volumen\ máximo = 3 \cdot 9 \cdot 18 \Rightarrow \underline{V = 486\ cm^3}.$

****

Bloque 2.- Álgebra.

3º) Calcular el valor de la matriz $M=X^2-Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del sistema: $\begin{cases} 4X+3Y=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{r} 4X+3Y=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4X+3Y=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X-2Y=\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{r} -4X-3Y=\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ 6X+3Y=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 2X=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M=X^2-Y^2=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}}.$$

****

4º) Un granjero compra un determinado mes 274 euros de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes, A, B y C. Se sabe que si el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5 euros, 4 euros y 4 euros, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas.

Sean x, y, z los sacos de piensos que compra el granjero de las marcas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+4y+4z=274 \\ x+y+z=66 \\ z=2\cdot(x+y) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5x+4y+4z=274 \\ x+y+z=66 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 274 & 4 & 4 \\ 66 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-274+528-548+264}{-5+8+8-8-10+4}=\frac{792-822}{12-15}=\frac{-30}{-3}=10.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 274 & 4 \\ 1 & 66 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-330+548-528+274}{-3}=\frac{822-858}{-3}=\frac{-36}{-3}=12.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 274 \\ 1 & 1 & 66 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{548+528-548-660}{-3}=\frac{528-660}{-3}=\frac{-132}{-3}=44.$$

$\underline{El\ granjero\ ha\ comprado\ 10\ sacos\ de\ A, 12\ sacos\ de\ B\ y\ 44\ sacos\ de\ C.}$

****

Bloque 3.- Geometría.

5º) Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional: $A(0,-2,3), B(1,-1,4)$, $C(2,3,3)\ y\ D(4,5,5)$.

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ que pasa por el punto A.

----

a)

Los puntos $A(0,-2,3), B(1,-1,4),\ C(2,3,3)\ y\ D(4,5,5)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,-1,4) - (0,-2,3)] = (1,1,1).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(2,3,3) - (0,-2,3)] = (2,5,0).$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(4,5,5) - (0,-2,3)] = (4,7,2).$$

Los puntos A, B, C y D serán coplanarios cuando lo sean los tres vectores que determinan, por lo cual, el rango de los tres vectores tiene que ser 2, es decir: que el determinante de la matriz que forman sea cero.

$$Rang\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 14 - 20 - 4 = 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ son\ coplanarios}.$$

El plano π que contiene a los puntos A, B, C y D es el siguiente:

$$\pi\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ \ A\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$2(y+2) + 5(z-3) - 2(z-3) - 5x = 0;\ -5x + 2(y+2) + 3(z-3) = 0;$

$-5x + 2y + 4 + 3z - 9 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 5x - 2y - 3z + 5 = 0}.$

b)

Dos vectores del plano π son $\vec{u} = (2,1,-3)\ y\ \vec{v} = (3,0,-3)$.

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

$$\overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3i - 9j - 3k + 6j = -3i - 3j - 3k \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1).$$

La recta pedida, r, que pasa por $A(0, -2, 3)$ y es perpendicular a π tiene como vector director al vector normal del plano; su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda. \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}$$

****

6º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y-z=9$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-2-\lambda+2\mu \\ z=3+3\lambda-\mu \end{cases}$:

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$.

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2.

----

a)

Un vector normal del plano π_1 es $\overrightarrow{n_1}=(2,3,-1)$ y un vector normal del plano π_2 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus vectores directores, que son $\vec{u}=(1,-1,3)$ y $\vec{v}=(1,2,-1)$:

$$\overrightarrow{n_2{}'}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=i+3j+2k+k-6i+j=-5i+4j+3k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(5,-4,-3)$.

El vector director de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto mixto de los vectores normales de los planos π_1 y π_2:

$$\overrightarrow{v_r{}'}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}=-9i-5j-8k-15k-4i+6j=-13i+j-23k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(13,-1,23)$.

El punto medio de $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ es $M(0,-2,1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=13\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=1+23\lambda \end{cases}}.$$

b)

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales.

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|\cdot\cos\beta \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|(2,3,-1)\cdot(5,-4,-3)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-4)^2+(-3)^2}}=$$

$$=\frac{|10-12+3|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{25+16+9}}=\frac{|1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{700}}=0{,}0378 \Rightarrow \underline{\beta=87^\circ\ 50'\ 2''}.$$

****

Bloque 4.- Probabilidad.

7º) En un cierto instituto el 50 % de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40 % lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5 % de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60 % y en los desayunos comprados en el bazar del 80 %.

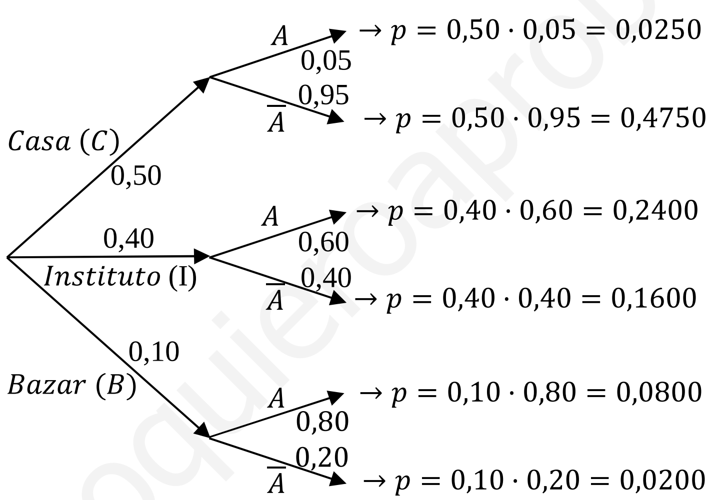
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) Justificar si es cierto que más de un 30 % de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.

c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1.

----

a)



b)

$$P = P(A) = P(C \cap A) + P(I \cap A) + P(B \cap A) =$$

$$= P(C) \cdot P(A/C) + P(I) \cdot P(A/I) + P(B) \cdot P(A/B) =$$

$$= 0{,}50 \cdot 0{,}05 + 0{,}40 \cdot 0{,}60 + 0{,}10 \cdot 0{,}80 = 0{,}0250 + 0{,}2400 + 0{,}0800 =$$

$$= 0{,}3450 = 34{,}50\ \% > 30\ \%.$$

$\underline{Es\ cierto\ que\ más\ del\ 30\ \%\ de\ los\ desayunos\ llevan\ bebida\ azucarada.}$

c)

$$P = P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(A)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}05}{0{,}3450} = \frac{0{,}025}{0{,}345} = 0{,}0725 < 0{,}1.$$

$\underline{No\ es\ cierto\ que\ la\ p.\ que\ los\ desayunos\ de\ casa\ con\ azucarada\ sea > 0{,}1.}$

****

8º) Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los qne NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 100;\ \ p = 0{,}8;\ \ q = 0{,}2.$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 100 \cdot 0{,}8 > 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0{,}2 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}8 = 80.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{16} = 4.$

$X = B(100;\ 0{,}8) \approx N(80, 4).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-80}{4}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 75) = P\left(Z \geq \frac{74{,}5-80}{4}\right) = P\left(Z \geq \frac{-5{,}5}{4}\right) \cong P(Z \geq -1{,}375) =$

$= P(Z < 1{,}375) = \frac{0{,}9147+0{,}9162}{2} = \underline{0{,}9155}.$

b)

$n = 225;\ \ p = 0{,}8;\ \ q = 0{,}2.$

$\mu = n \cdot p = 225 \cdot 0{,}8 = 180.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{225 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{36} = 6.$

$X = B(225;\ 0{,}8) \approx N(180, 6).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-180}{6}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P\left(\frac{169{,}5-180}{6} \leq Z \leq \frac{190{,}5-180}{6}\right) = P\left(\frac{-10{,}5}{6} \leq Z \leq \frac{10{,}5}{6}\right) =$$

$$= P(-1{,}75 \leq Z \leq 1{,}75) = P(Z \leq 1{,}75) - P(Z \leq -1{,}75) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}75) - [1 - P(Z \leq 1{,}75)] = 2 \cdot P(Z \leq 1{,}75) - 1 = 2 \cdot 0{,}9599 - 1 =$$

$$= 1{,}9198 - 1 = \underline{0{,}9198}.$$

$c)$

De 100 individuos se espera que eliminen el acné los siguientes:

$$n = N \cdot p = 500 \cdot 0{,}8 = 400.$$

$\underline{De\ los\ 500\ individuos\ se\ espera\ que\ NO\ eliminen\ el\ acn\acute{e}\ 100\ individuos.}$

****