PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestad de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Considerar las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, donde k es un parámetro real.

$a)$ Calcular $A \cdot B$, y determinar en función de los valores de k, si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

$b)$ Estudiar lo mismo que en el apartado $a)$ pero ahora con la matriz $B \cdot A$.

$c)$ Para $k = -2$ encontrar la matriz inversa de $B \cdot A$.

$a)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k + k - k(2k-2) = 0;$$

$2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0.$

$$\underline{La\ matriz\ A \cdot B\ no\ tiene\ inversa\ \forall k \in R}.$$

$b)$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}}.$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3 = 0;\ \ k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-9}}{2} \Rightarrow k \notin R.$$

$$\underline{La\ matriz\ B \cdot A\ es\ invertible\ \forall k \in R}.$$

$c)$

Para $k = -2$ es $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \qquad (B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B \cdot A)^{-1} = \frac{Adj.de\ (B \cdot A)^t}{|B \cdot A|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por la siguiente función: $B(x) = \begin{cases} 5x + 15 & si \quad 0 < x \leq 3 \\ -(x-3)^2 + 30 & si \;\; 3 < x \leq 8 \end{cases}$.

$a)$ ¿Es continua la función $B(x)$?

$b)$ ¿Es derivable? Dar el conjunto donde es derivable la función.

$c)$ Hacer un dibujo de la función en su dominio.

$d)$ Determinar el beneficio máximo y el beneficio mínimo.

$e)$ Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de los beneficios.

$a)$

La función $B(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, excepto para $x = 3$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (5x + 15) = 30 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} [-(x-3)^2 + 30] = 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3).$$

$$\underline{La\ función\ B(x)\ es\ continua\ para\ x = 3.}$$

$b)$

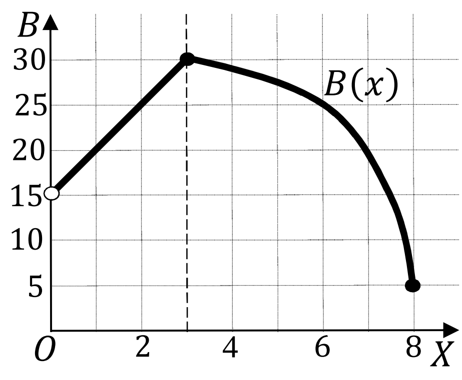
Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual:

$$\underline{B(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 3.}$$

$$\underline{B(x)\ es\ derivable\ \forall x \in (0, 3) \cup (3, 8).}$$

$c)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.



$d)$

De la observación de la figura se deducen el máximo y el mínimo de la función, que son los siguientes:

El máximo se produce para $x = 3 \Rightarrow B(3) = 5 \cdot 3 + 15 = 15 + 15 = 30$.

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 30.000\ euros.}$$

El mínimo se produce para $x = 8 \Rightarrow B(8) = -(8-3)^2 + 30 = -5^2 + 30 =$

$= 5$.

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 5.000\ euros.}$$

$e)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$B'(x) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 < x \leq 3 \\ -2(x-3) & si \quad 3 < x \leq 8 \end{cases}.$$

$$\underline{Crecimiento: B'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 3).}$$

$$\underline{Decrecimiento: B'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (3, 8).}$$

****

3º) Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener un 6 es de $\frac{1}{2}$ y que las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p. Se lanza dicho dado, calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Se obtiene un dos.

b) No se obtiene un tres.

c) Se obtiene un número par.

d) Se obtiene un número impar.

La probabilidad de obtener un número distinto de 6 es equiprobable para el resto de los números, por lo cual:

$$5p+\frac{1}{2}=1;\ \ 10p+1=2;\ \ 10p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{10}.$$

a) $\underline{P=p=\frac{1}{10}}$.

b) La probabilidad pedida es la unidad menos la probabilidad de obtener 3:

$$P=1-p=1-\frac{1}{10}=\underline{\frac{9}{10}=0,9}.$$

c)

$$P=P(2)+P(4)+P(6)=p+p+\frac{1}{2}=2p+\frac{1}{2}=\frac{2}{10}+\frac{1}{2}=\frac{2+5}{10}=\underline{\frac{7}{10}=0,7}.$$

d)

$$P=P(1)+P(3)+P(5)=p+p+p=3p=\underline{\frac{3}{10}=0,3}.$$

****

4º) En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pilas es de 80 horas.

a) Si $\alpha = 0{,}2$ (nivel de significación), y en una muestra de 50 de esas pilas la duración media es de 500 horas, determinar el intervalo de confianza para la duración media poblacional.

b) Si la duración de ese tipo de pilas siguiera una normal de media 500 horas y la desviación típica 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuese mayor que 520 horas?

----

a)

Para un nivel de significación de $\alpha = 0{,}2 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,1} = 1{,}28$

$(1 - 0{,}1 = 0{,}9000 \;\rightarrow z = 1{,}28)$.

Datos: $n = 50;\; \overline{x} = 500;\; \sigma = 80;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}28$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(500 - 1{,}28 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}};\; 500 + 1{,}28 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}\right);$

$(500 - 1{,}28 \cdot 11{,}31377;\; 500 + 1{,}28 \cdot 11{,}31377);$

$(500 - 14{,}4815;\; 500 + 14{,}4815);\;\; (485{,}5185;\; 514{,}4815).$

$$\underline{I.C._{80\,\%} = (485{,}5185;\; 514{,}4815).}$$

b)

$Datos: \mu = 500;\; n = 9;\; \sigma = 80.$

$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(500; \frac{80}{\sqrt{9}}\right) = N(500;\; 26{,}67).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X - 500}{26{,}67}$.

$P = P(X > 520) = P\left(Z > \frac{520-500}{26{,}67}\right) = P\left(Z > \frac{20}{26{,}67}\right) = P(Z > 0{,}75) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = \underline{0{,}2266}.$

****

OPCIÓN B

1º) El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 euros por persona. Los niños pagan el 50 % de este precio, y los jubilados pagan el 60 % del precio. Determinar el número de personas que no son niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el nombre de jubilados era igual al 25 % del número de niños y que recaudaron un total de 5.680 euros por todas las estancias.

$a)$

Sean x, y, z las personas que no son niños ni jubilados, los niños y los jubilados que había ese día en el hotel, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ z=0{,}25y \\ 50x+25y+30z=5.680 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ y+4z=0 \\ 10x+5y+6z=1.136 \end{array}\right\} \Rightarrow y=4z.$$

$$\left.\begin{array}{r} x+4z+z=200 \\ 10x+20z+6z=1.136 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+5z=200 \\ 10x+26z=1.136 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+5z=200 \\ 5x+13z=568 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x+25z=1.000 \\ -5x-13z=-568 \end{array}\right\} \Rightarrow 12z=432;\ \ z=\frac{432}{12}=36.$$

$$x+5\cdot 36=200;\ \ x=200-180=20.$$

$$20+y+36=200;\ \ y=200-56=144.$$

$$\underline{Había\ 20\ personas\ que\ no\ son\ niños\ ni\ jubilados,144\ niños\ y\ 36\ jubilados.}$$

****

2º) Considerar la función $f(x,y)=x-y$.

a) Representar el conjunto de puntos del plano definido por:

$A=\{(x,y): 3x+y\geq 15;\ \ y-x\leq -5;\ \ 2x+3y\leq 60;\ \ y\geq 0\}$ y calcular el valor máximo de $f(x,y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que todavía fuese el mismo conjunto?

b) Decir si la función $f(x,y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto:

$A=\{(x,y): 3x+y\leq 15;\ \ x-y\geq 5;\ \ x\geq 0\}$.

----

a)

Las condiciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+y\geq 15 \\ y-x\leq -5 \\ 2x+3y\leq 60 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow 3x+y\geq 15 \Rightarrow y\geq 15-3x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	5
y	15	0

② $\Rightarrow y-x\leq -5 \Rightarrow y\leq x-5 \rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

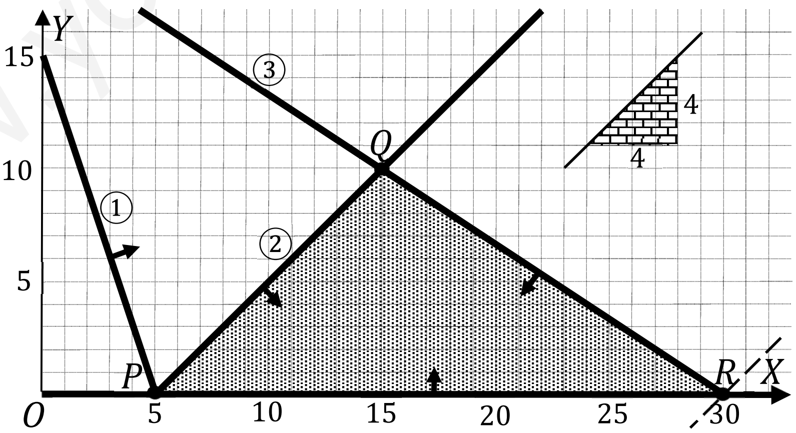
x	5	15
y	0	10

③ $\Rightarrow 2x+3y\leq 60 \Rightarrow y\leq \frac{60-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	15	30
y	00	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

$\underline{La\ zona\ factible\ es\ la\ misma\ si\ se\ elimina\ la\ condición\ 3x+y\geq 15.}$



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=-5 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=5 \Rightarrow P(5,0).$

$Q\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=-5 \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} -2x+2y=-10 \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=50;\ \ y=10;\ 10-x=-5;$

$x = 15 \Rightarrow Q(15, 10).$

$R \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 60 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 60;\ \ x = 30 \Rightarrow R(30, 0).$

La función de objetivos es $f(x, y) = x - y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P \Rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5.$

$Q \Rightarrow f(15, 10) = 15 - 10 = 5.$

$R \Rightarrow f(30, 0) = 30 - 0 = 30.$

$\underline{\textit{El máximo se produce en el punto } R \textit{ y su valor es } 30.}$

También se hubiera obtenido el punto R por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{1}x = \frac{4}{4}x \Rightarrow m = \frac{4}{4}.$

$b)$

Las nuevas condiciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x + y \leq 15 \\ x - y \geq 5 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x + y \leq 15 \Rightarrow y \leq 15 - 3x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

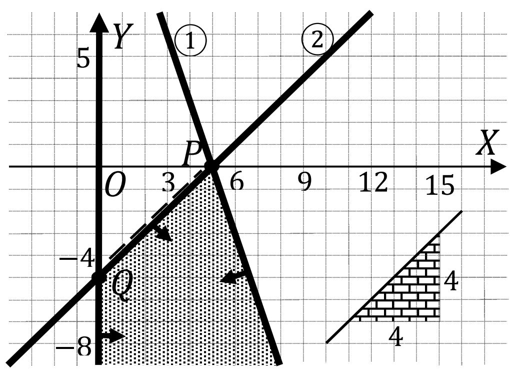
x	5	7
y	0	-6

② $\Rightarrow x - y \geq 5 \Rightarrow y \leq x - 5 \rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	5	10
y	0	5

La nueva región factible, que es abierta, es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la nueva zona factible son los siguientes:



$P \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + y = 15 \\ x - y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 20;\ \ x = 5.$

$y = 0 \Rightarrow P(5, 0).$

$Q \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -5 \Rightarrow Q(0, -5).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P \Rightarrow f(5,0) = 5 - 0 = 5.$

$Q \Rightarrow f(0,-5) = 0 - (-5) = 5.$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ segmento\ de\ extremos\ P\ y\ Q.}$$

También se hubiera obtenido el segmento PQ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{1}x = \frac{4}{4}x \Rightarrow m = \frac{4}{4}.$

****

3º) Considere la función $h(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$.

a) Calcular una primitiva de esta función.

b) Calcular la siguiente integral definida: $I = \int_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx$, y comprobar que su valor es $\frac{1}{3}$.

----

a)

$$H(x) = \int x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^3 = t \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3} \int e^t \cdot dt = \frac{1}{3} e^t + C.$$

$$\underline{H(x) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.}$$

b)

$$I = \int_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \left[e^{x^3}\right]_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(e^{L3} - e^{L2}\right) = \frac{1}{3} \cdot (3 - 2) = \frac{1}{3}.$$

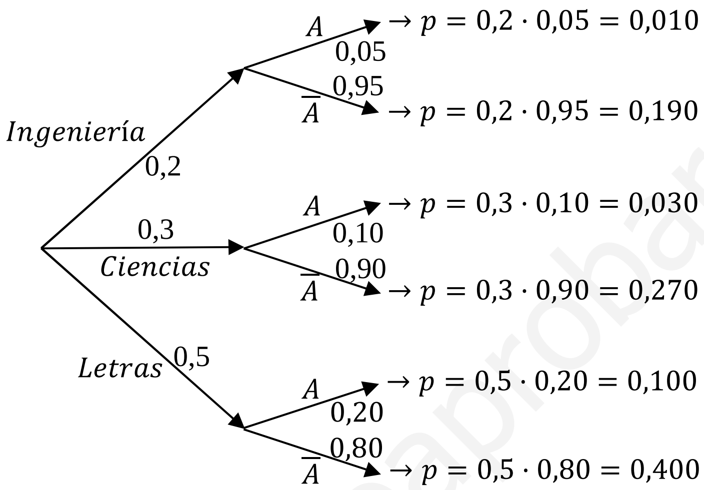
$$\underline{I = \int_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \frac{1}{3}\ como\ se\ pedía\ comprobar.}$$

****

4º) En una universidad, en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, acaban la carrera el 5 % de ingeniería, el 10 % de ciencias y el 20 % de letras. Se sabe que el 20 % estudian ingeniería, el 30 %, ciencias y el 50 %, letras. Tomado un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.

b) Nos dicen que ha acabado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería.



a)

$$P = P(A \cap I) = P(I) \cdot P(A/I) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 = \underline{0{,}01}.$$

b)

$$P = P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{P(I) \cdot P(A/I)}{P(I) \cdot P(A/I) + P(C) \cdot P(A/C) + P(L) \cdot P(A/L)} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}10 + 0{,}5 \cdot 0{,}20} = \frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}10} = \frac{0{,}01}{0{,}14} = \underline{0{,}0714}.$$

****