PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las dos opciones, A o B, propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadoras de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que puedan almacenar o transferir información.

OPCIÓN A

1º) En Bernat quedé ayer en un bar con unos amigos que tomamos 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. En total pagamos 19,50 euros. Días atrás había ido al mismo bar con mi primo Martí, y por 2 cervezas, un panecillo y dos cafés con leche nos cobraron 8,10 euros. En este bar todas las cervezas tienen el mismo precio y todos los panecillos tienen el mismo precio.

a) Identifica las variables e interpreta el enunciado con un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Hoy ha vuelto con otros amigos al mismo bar y han consumido 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Con las ecuaciones del apartado anterior, calcula cuanto han pagado en total.

c) Si una cerveza, un panecillo y un café con leche cuestan 5,10 euros, ¿cuánto vale la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente?

----

a)

Sean x, y, z los precios de la cerveza, el panecillo y el café con leche, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19{,}5 \\ 2x+y+2z=8{,}1 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} 8x+6y+10z=39 \\ 20x+10y+20z=81 \end{array}\right\}}.$$

$b)$

$$\left.\begin{array}{r}2x+2y+3z=m\\4x+3y+5z=19{,}5\\2x+y+2z=8{,}1\end{array}\right\}.$$ Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}2&2&3&m\\4&3&5&19{,}5\\2&1&2&8{,}1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F_2\to F_2-2F_1\\F_3\to F_3-F_1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&3&m\\0&-1&-1&19{,}5-2m\\0&-1&-1&8{,}1-m\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to F_3-F_2\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&3&m\\0&-1&-1&19{,}5-2m\\0&0&0&-11{,}4+m\end{pmatrix}\Rightarrow -11{,}4+m=0;\ \ m=11{,}4.$$

$$\underline{En\ total\ han\ pagado\ 11{,}4\ euros.}$$

$c)$

$$\left.\begin{array}{r}4x+3y+5z=19{,}5\\2x+y+2z=8{,}1\\x+y+z=5{,}1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}8x+6y+10z=39\\20x+10y+20z=81\\10x+10y+10z=51\end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}39&6&10\\81&10&20\\51&10&10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}8&6&10\\20&10&20\\10&10&10\end{vmatrix}}=\frac{60\cdot\begin{vmatrix}13&3&1\\27&5&2\\17&5&1\end{vmatrix}}{200\cdot\begin{vmatrix}4&3&5\\2&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{65+102+135-85-130-81}{4+10+6-5-8-6}=\frac{3}{10}\cdot\frac{302-296}{1}=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot 6=1{,}8=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}8&39&10\\20&81&20\\10&51&10\end{vmatrix}}{200}=\frac{60\cdot\begin{vmatrix}4&13&1\\10&27&2\\5&17&1\end{vmatrix}}{200}=\frac{3}{10}\cdot\frac{108+170+130-135-136-130}{1}=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot(408-401)=\frac{3}{10}\cdot 7=2{,}1=y.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}8&6&39\\20&10&81\\10&10&51\end{vmatrix}}{200}=\frac{12\cdot\begin{vmatrix}4&3&13\\10&5&27\\5&5&17\end{vmatrix}}{200}=\frac{3}{50}\cdot\frac{340+650+405-325-540-510}{1}=$$

$$=\frac{3}{50}\cdot(1.395-1.375)=\frac{3}{50}\cdot 20=1{,}2=z.$$

$$\underline{Cerveza: 1{,}8\ euros;\ panecillo: 2{,}1\ euros\ y\ el\ café\ con\ leche: 1{,}2\ euros.}$$

****

2º) De una función $f(x)$ sabemos que su derivada es $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Determina las abscisas de sus extremos relativos y calcúlalos.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 18x;\;\; 2x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -3), (-3, 0), (0, 3)\ y\ (3, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 3)$ es:

$$f'(1) = 2 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1 = 2 - 18 = -16 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -3) \cup 0, 3}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 6x^2 - 18.$$

$$f''(-3) = 6 \cdot (-3)^2 - 18 = 36 > 0 \Rightarrow \underline{Mínmo\ relativo\ para\ x = -3}.$$

$$f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo\ para\ x = 0}.$$

$$f''(3) = 6 \cdot 3^2 - 18 = 36 > 0 \Rightarrow \underline{Mínmo\ relativo\ para\ x = 3}.$$

****

3º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0{,}8;\ P(A^c) = 0{,}5$, donde A^c denota el suceso complementario de A, y $P(A \cap B) = 0{,}3$.

a) Calcula las probabilidades $P(B)\ y\ P(A/B)$.

b) Calcule las probabilidades $P(A \cap B^c)\ y\ P(A^c \cup B^c)$.

c) ¿Son A y B sucesos independientes? Razona la respuesta.

$$Datos: P(A \cup B) = 0{,}8;\ \ P(A^c) = 0{,}5;\ \ P(A \cap B) = 0{,}3.$$

a)

$$P(A^c) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

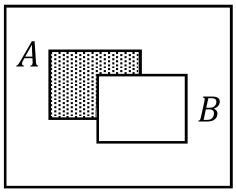
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}5 + 0{,}3 = \underline{0{,}6}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \underline{0{,}5}.$$

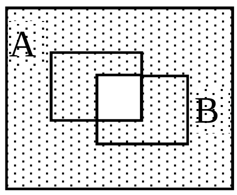
b)

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}3 = \underline{0{,}2}.$$



$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = \underline{0{,}7}.$$



$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$

c)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3 = P(A \cap B).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ son\ independientes.}$

****

4º) En una población una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de 100 personas cuya media ha sido 67.

a) Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media de la población.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar, con un nivel de confianza del 99 %, la media de la población con un error no superior a 2?

----

a)

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$1-\alpha=0{,}93 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}93=0{,}07 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}035}=1{,}81.$
$(1-0{,}035=0{,}965 \ \rightarrow z=1{,}81).$

Datos: $n=100;\ \ \overline{x}=67;\ \sigma=8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(67-1{,}81\cdot\frac{8}{\sqrt{100}};\ 67+1{,}81\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}\right);\ \ (67-1{,}81\cdot 0{,}8;\ 67+1{,}81\cdot 0{,}8);$

$(67-1{,}448;\ 67+1{,}448).$

$$\underline{I.C._{93\ \%}=(65{,}552;\ 68{,}448).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}05=0{,}9950 \ \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ \ E=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{8}{2}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 4)^2=10{,}3^2=106{,}09.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 107\ personas.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Determina una fórmula para calcular A^n y utilízala para calcular A^{14}.

c) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^3 = a^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b)

Del apartado anterior se deduce que $\underline{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}$. $\underline{A^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}}$.

c)

$$A \cdot X + \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A; \ \ A \cdot X = 2A - \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = M;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M; \ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot \left(2A - \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B\right)}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = 2A - \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2A - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = M.$$

$$X = A^{-1} \cdot M = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A necesita 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer un anillo del modelo B necesita 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B le proporcionan por unidad un beneficio de 35 y 55 euros, respectivamente.

a) Plantea la maximización del beneficio de la joyería como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la resolución, indicando las rectas y vértices que la determinan.

c) Sabiendo que vende toda la producción, determina cuantos anillos de cada modelo tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio e indica cuál es este beneficio.

----

a)

Sean x e y el número de anillos de los tipos A y B que fabrica y vende el taller joyería, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 6x+2y \le 150 \\ 3x+6y \le 180 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\} \;\; \underline{\left.\begin{array}{r} 3x+y \le 75 \\ x+2y \le 60 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\}}.$

b)

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

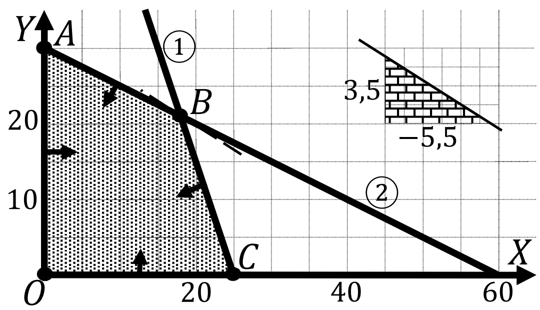
① $\Rightarrow 3x+y \le 75 \Rightarrow y \le 75-3x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	20	25
y	15	0

② $\Rightarrow x+2y \le 60 \Rightarrow y \le \frac{60-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	60	0
y	0	30

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,30).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=75 \\ x+2y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 6x+2y=150 \\ -x-2y=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x=90;\;\; x=18;\;\; 18+2y=60;\;\; 9+y=30;\;\; y=21 \Rightarrow B(18,21).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=75;\;\; x=25 \Rightarrow C(25,0).$

$c)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 35x + 55y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,30) = 35 \cdot 0 + 55 \cdot 30 = 0 + 1.650 = 1.650.$

$B \Rightarrow f(18,21) = 35 \cdot 18 + 55 \cdot 21 = 630 + 1.115 = 1.785.$

$C \Rightarrow f(25,0) = 35 \cdot 25 + 55 \cdot 0 = 875 + 0 = 875.$

El máximo se produce en el punto $B(18,21)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 35x + 55y = 0 \Rightarrow y = -\frac{35}{55}x = -\frac{7}{11}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{5,5}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 18\ anillos\ modelo\ A\ y\ 21\ modelo\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.785\ euros.}$

****

3º) El beneficio semanal de una empresa expresado en euros, que fabrica y vende x objetos, según la función $B(x) = -0{,}75x^2 + 75x - 1.200, con\ 20 \leq x \leq 80$.

a) Calcula el beneficio que obtiene fabricando y vendiendo 20 objetos.

b) Busca el número de objetos que ha de fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, y determina también ese beneficio máximo.

c) El beneficio medio por x objetos es $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Diga cuántos objetos ha de fabricar y vender para que el beneficio medio sea máximo, y cuál es este beneficio.

----

a)

$$B(20) = -0{,}75 \cdot 20^2 + 75 \cdot 20 - 1.200 = -0{,}75 \cdot 400 + 1.500 - 1.200 =$$

$$= -300 + 300 = 0.$$

$$\underline{Fabricando\ 20\ objetos\ no\ se\ obtiene\ ningún\ beneficio.}$$

b)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada.

$$B'(x) = -1{,}5x + 75.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -1{,}5x + 75 = 0;\ -15x + 750 = 0;\ -x + 50 = 0 \Rightarrow x = 50.$$

$$B''(x) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 50.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ y\ vendiendo\ 50\ objetos.}$$

$$B(50) = -0{,}75 \cdot 50^2 + 75 \cdot 50 - 1.200 = -0{,}75 \cdot 2.500 + 3.750 - 1.200 =$$

$$= -1.875 + 2.550 = 675.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 675\ euros.}$$

c)

$$M(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{-0{,}75x^2 + 75x - 1.200}{x} = -0{,}75x + 75 - \frac{1.200}{x}.$$

$$M'(x) = -0{,}75 + 0 + \frac{1.200}{x^2} = -0{,}75 + \frac{1.200}{x^2}.$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}75 + \frac{1.200}{x^2} = 0;\ \ 0{,}75x^2 = 1.200;\ \ 75x^2 = 120.000;$$

$x^2 = \frac{120.000}{75} = 1.600 \Rightarrow x = \sqrt{1.600} = 40.$

$\underline{El\ beneficio\ medio\ es\ máximo\ fabricando\ y\ vendiendo\ 40\ objetos.}$

$M(40) = -0{,}75 \cdot 40 + 75 - \frac{1.200}{40} = 75 - 30 = 45.$

$\underline{El\ beneficio\ medio\ máximo\ es\ de\ 45\ euros\ cada\ objeto.}$

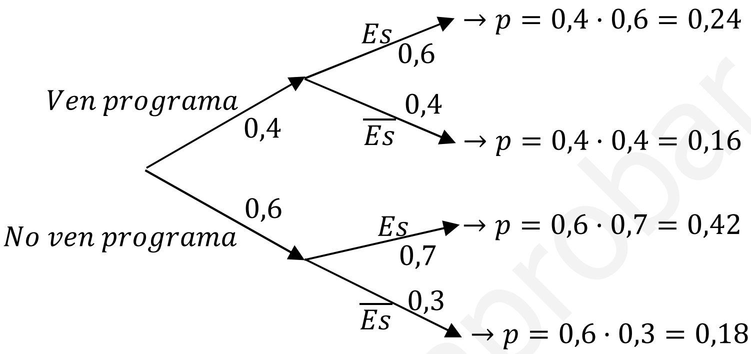
****

4º) En una población, el tanto por ciento de personas que ven un cierto programa de televisión es del 40 %. Se sabe que el 60 % de las personas que lo ven tienen estudios superiores y que el 30 % de las personas que no lo ven no tienen estudios superiores.

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga estudios superiores?

c) Halla la probabilidad que una persona que tenga estudios superiores, vea el programa.



a)

$$Datos: P(V) = 0{,}4;\ \ P(Es/V) = 0{,}6;\ \ P\left(\overline{V}/\overline{Es}\right) = 0{,}3.$$

b)

$$P = P(Es) = P(V \cap Es) + P\left(\overline{V} \cap Es\right) =$$

$$= P(V) \cdot P(Es/V) + P\left(\overline{V}\right) \cdot P\left(Es/\overline{A}\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}24 + 0{,}42 = \underline{0{,}66}.$$

c)

$$P = P(V/Es) = \frac{P(V \cap Es)}{P(Es)} = \frac{P(V) \cdot P(Es/V)}{P(Es)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}66} = \frac{0{,}24}{0{,}66} = \underline{0{,}3636}.$$

****