PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función $f(x) = -x\,L\,x$. Se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b) Demostrar que f(x) presenta un máximo relativo para $x = \frac{1}{e}$.

c) Hacer una gráfica de esta función.

---

a)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x\,L\,x) = -0 \cdot (-\infty) \Rightarrow \text{Indeterminado} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} x = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x\,L\,x) = -\infty \cdot (-\infty) = \infty^2 = \underline{\underline{\infty}}$$

b)

$$f'(x) = -1 \cdot L\,x - x \cdot \frac{1}{x} = -L\,x - 1 \;;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow -Lx - 1 = 0 \;;;\; Lx = -1 \;;;\; \underline{x = \frac{1}{e}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\tfrac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximo relativo para } x = \frac{1}{e}, \textit{ c.q.d.}}}$$

c)

Para hacer una gráfica de f(x), además de los datos facilitados por los apartados anteriores conviene tener en cuenta lo siguiente.

La función está definida solamente para valores de x mayores que cero. (Los números negativos no tienen logaritmo y el logaritmo de cero es menos infinito, que no es real).

Se anula para x = 1, por lo tanto pasa por el punto A(1, 0).

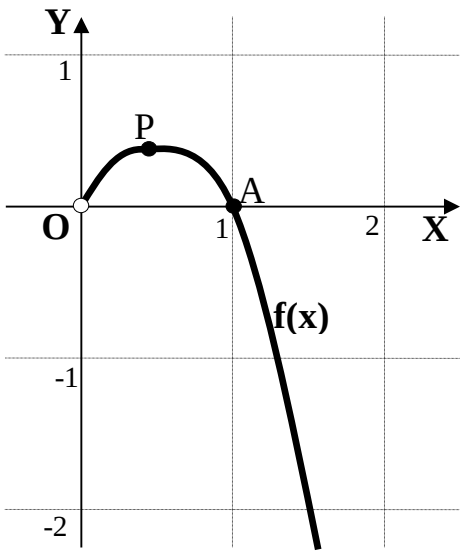
El máximo relativo es el siguiente punto:

$$f'\left(\tfrac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = -\frac{1}{e} \cdot (0-1) = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)}$$

$f''(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) \neq 0, \ \forall x \in R$ y también $f''(x) < 0, \ \forall x \in R$, lo cual significa que la función no tiene puntos de inflexión; que es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ y que es cóncava $(\cap)$ en su dominio.

De los límites de los apartados anteriores se deduce que no tiene asíntotas.

Con los razonamientos y datos anteriores podemos esbozar con bastante exactitud la gráfica de la función, que es la que sigue.



****

2º) Se considera el conjunto M de las matrices 3x3 tales que en cada fila y en cada columna tienen dos ceros y un 1. Se pide:

a) Escribir todas las matrices del conjunto M.

b) Ver que todas estas matrices tienen inversa.

---

a)

Por seguir un orden he partido de la matriz I y he mantenido el primer uno en el elemento a_{11} y he completado los dos casos posibles; después he repetido en proceso con los elementos a_{12} y a_{13}.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|M_1| = 1 \quad ;; \quad |M_2| = -1 \quad ;; \quad |M_3| = -1 \quad ;; \quad |M_4| = 1 \quad ;; \quad |M_5| = 1 \quad ;; \quad |M_6| = -1$$

En efecto, todas las matrices tienen su determinante distinto de cero, por lo tanto, todas son inversibles, como teníamos que ver.

****

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. ¿Puede aplicarse este teorema a la función trigonométrica $f(x) = sen(2x) + \cos(3x)$ si el intervalo es $[0,\ \pi]$? Encontrar, si existe, un punto de $[0,\ \pi]$ en el cual se anule esta función.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Se trata de encontrar dos valores reales $a,\ b \in (0,\ \pi)$, tales que: f(a) < 0 y f(b) > 0:

Por ejemplo:

$$\underline{x = \frac{\pi}{3}} \Rightarrow f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = sen\ \frac{2\pi}{3} + \cos\pi = sen\ 120º + \cos 180º = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-2}{2} < 0$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{4}} \Rightarrow f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = sen\ \frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{4} = sen\ 90º + \cos 135º = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} > 0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función f(x) tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(0,\ \pi)$.

Vamos a determinar, al menos un punto:

$$f(x) = sen(2x) + \cos(3x) = 0\ ;;\ sen(2x) + \cos(2x + x) = 0\ ;;$$

$$2\,sen\ x \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \cos x - sen(2x) \cdot sen\ x = 0\ ;;$$

$$2\,sen\ x \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \cos x - 2\,sen\ x \cdot \cos x \cdot sen\ x = 0\ ;;$$

$$\cos x \cdot \left[2\,sen\ x + \cos(2x) - 2\,sen^2 x\right] = 0 \Rightarrow \cos x = 0\ ;;\ \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$$

Otras soluciones se obtienen de la ecuación: $2\,sen\ x + \cos(2x) - 2\,sen^2 x = 0$

$$2\,sen\ x + \cos^2 x - sen^2 x - 2\,sen^2 x = 0\ ;;\ 2\,sen\ x + 1 - sen^2 x - 3\,sen^2 x = 0\ ;;$$

$$4\,sen^2 x - 2\,sen\ x - 1 = 0\ ;;\ sen\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cdots\cdots$$

****

4º) Decir para que valor de k el sistema $\begin{cases} kz + kt = 1 \\ kx + z = 0 \\ ky + t = 0 \end{cases}$ es compatible. Resolverlo en el caso de k = 1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se trata de un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, el sistema será compatible cuando ambas matrices tengan por rango tres o dos, que es el mínimo que pueden tener, ya que existe el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Veamos el rango de M en función de k:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = k^3 = 0 \;;;\; \underline{k = 0} \\ \\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k^3 = 0 \;;;\; \underline{k = 0} \\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 = 0 \;;;\; \underline{k = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{k = 0 \Rightarrow Rango\ \ M = 2} \\ \\ \underline{k \neq 0 \Rightarrow Rango\ \ M = 3} \end{array} \right\}$$

Veamos el rango de M' para k = 0, donde las dos primeras columnas tienen todos sus elementos cero, por lo tanto:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_3,\ C_4,\ C_5\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k = 0 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Para k = 1 resulta un sistema con mayor número de incógnitas que de ecuaciones, por lo cual es compatible indeterminado.

El sistema resultante es $\begin{cases} z+t=1 \\ x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$.

Considerando una de las incógnitas como parámetro, por ejemplo t, resulta:

$$\begin{cases} z=1-t \\ x=-z=-(1-t)=-1+t \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Encontrar todas las matrices reales 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}, \ \forall a \in R$$

****

2º) Hacer un dibujo de la región limitada por la función $y = x^3(x+2)$ y la recta y = 0. Calcular el área de esta región.

Se trata de una función polinómica, por lo cual es continua en su dominio, que es R. Para su dibujo vamos a determinar los máximos y mínimos, puntos de inflexión y cortes con los ejes.

Los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas son para x = 0 y x = -2.

$$y = x^3(x+2) = x^4 + 2x^3 \;;;\; y' = 4x^3 + 6x^2 = \underline{2x^2(2x+3) = y'}$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2(2x+3) = 0 \;;;\; \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = -\frac{3}{2}}$$

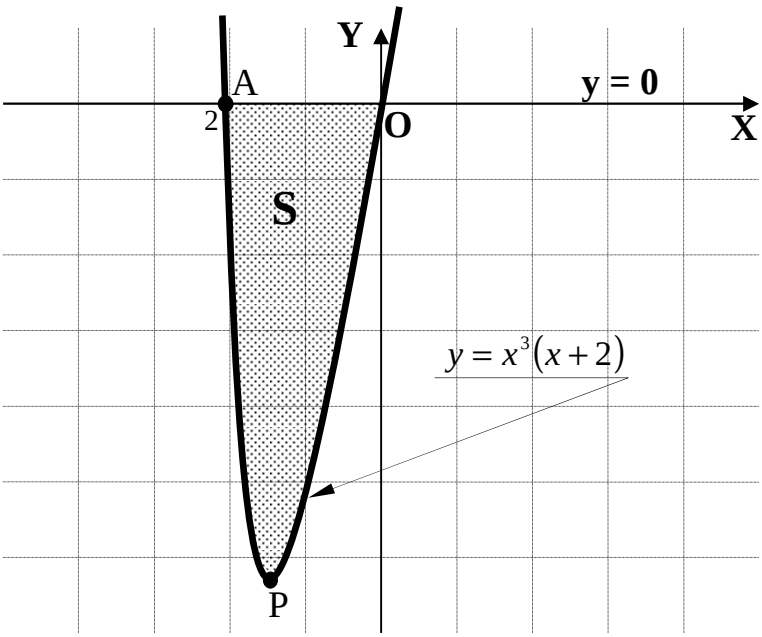
$$y'' = 12x^2 + 12x = \underline{12x(x+1) = y''}$$

$$y''(0) = 0 \;\rightarrow\; \textit{Para punto de inflexión.} \quad y''' = 24x + 12 \;;;\; y'''(0) = 12 \neq 0 \Rightarrow \underline{P.I. \Rightarrow O(0,\ 0)}$$

$$y''\left(-\tfrac{3}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{3}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} + 1\right) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; \textit{Máximo relativo para } x = -\frac{3}{2}.$$

$$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \left(-\frac{3}{2} + 2\right) = -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{27}{4} \;\Rightarrow\; \textit{Máx.} \;\Rightarrow\; \underline{A\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{27}{4}\right)}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



Para $-2 < x < 0$ resulta que y < 0, por lo tanto el valor del área resultará negativa; para evitarlo, cambiamos los límites de integración.

$$S=\int_{0}^{-2} x^{3}\left(x+2\right)\cdot dx=\int_{0}^{-2}\left(x^{4}+2x^{3}\right)\cdot dx=\left[\frac{x^{5}}{5}+\frac{2x^{4}}{4}\right]_{0}^{-2}=\left[\frac{x^{5}}{5}+\frac{x^{4}}{2}\right]_{0}^{-2}=$$

$$=\left[\frac{\left(-2\right)^{5}}{5}+\frac{\left(-2\right)^{4}}{2}\right]-0=-\frac{32}{5}+\frac{16}{2}=8-\frac{32}{5}=\frac{40-32}{5}=\underline{\underline{\frac{8}{5}\,u^{2}=S}}$$

****

3º) Encontrar la ecuación de la recta tangente la función $f(x)=\frac{L\,x}{x}$ en el punto de inflexión. Hacer una gráfica de la función en un entorno de este punto, donde aparezca también dibujada la recta tangente encontrada anteriormente.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-L\,x\cdot 1}{x^2}=\underline{\frac{1-L\,x}{x^2}=f'(x)}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-L\,x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-1-2(1-L\,x)}{x^3}=\frac{-1-2+2L\,x}{x^3}=\underline{\frac{2L\,x-3}{x^3}=f''(x)}$$

$$f'''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^3-(2L\,x-3)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2-3(2L\,x-3)}{x^4}=\frac{2-6L\,x+9}{x^4}=\underline{\frac{11-6L\,x}{x^4}=f'''(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{1-L\,x}{x^2}=0\ ;;\ 1-L\,x=0\ ;;\ L\,x=1\ ;;\ \underline{x=e}$$

$$f''(e)=\frac{2L\,e-3}{e^3}=\frac{2-3}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=e}$$

$$f(e)=\frac{L\,e}{e}=\frac{1}{e}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{Máx.\ \Rightarrow\ A\left(e,\ \frac{1}{e}\right)}\ \approx\ \underline{A(2'72,\ 0'34)}$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2L\,x-3}{x^3}=0\ ;;\ 2L\,x-3=0\ ;;\ L\,x=\frac{3}{2}\ ;;\ x=e^{\frac{3}{2}}=\underline{e\sqrt{e}=x}$$

$$f'''\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{11-6\cdot\frac{3}{2}}{e^3}=\frac{11-9}{e^3}=\frac{2}{e^3}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Punto\ \ de\ \ \inf lexión\ \ para\ \ x=e\sqrt{e}}$$

$$f\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{L\left(e\sqrt{e}\right)}{e\sqrt{e}}=\frac{\frac{3}{2}}{e\sqrt{e}}=\frac{3}{2e\sqrt{e}}=\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\ \ \Rightarrow\ \underline{P.I.\ \Rightarrow\ B\left(e\sqrt{e},\ \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right)}\ \approx\ \underline{B(4'48,\ 0'33)}$$

La ecuación de la recta tangente tiene como pendiente el valor de la derivada en ese punto:

$$m=f'\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{1-L\left(e\sqrt{e}\right)}{\left(e\sqrt{e}\right)^2}=\frac{1-\frac{3}{2}}{e^3}=\frac{-\frac{1}{2}}{e^3}=\underline{\frac{-1}{2e^3}=m}$$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$, apli-

cada a este caso sería:

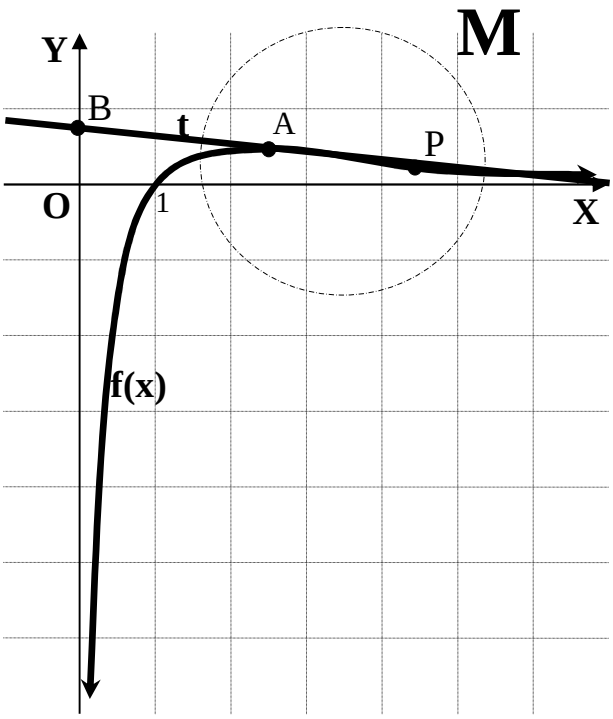
$$y-\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}=\frac{-1}{2e^3}\left(x-e\sqrt{e}\right)\ ;;\ 2e^3y-3e\sqrt{e}=-x+e\sqrt{e}\ \ ;;\ \underline{\underline{t\equiv x+2e^3y-4e\sqrt{e}=0}}$$

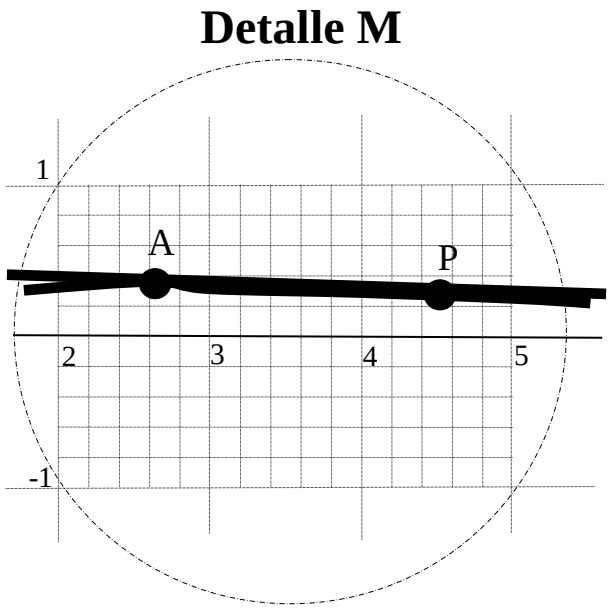
Para facilitar la expresión de la tangente, la expresamos en forma explícita y determinamos dos puntos de la misma:

$$y=\frac{-1}{2e^3}x+\frac{4e\sqrt{e}}{2e^3}=\frac{-1}{2e^3}x+\frac{2\sqrt{e}}{e^2}\ \ ;;\ x=0\ \Rightarrow\ y=\frac{2\sqrt{e}}{e^2}\cong 0'74\ \Rightarrow\ \underline{B(0,\ 0'74)}$$

$$y=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ x=4e\sqrt{e}-\frac{e^3}{2}\cong 18-10=8\ \Rightarrow\ \underline{C\left(\frac{1}{4},\ 8\right)}$$

Teniendo en cuenta que el dominio de definición de la función es $(0,\ +\infty)$ y que tiene por asíntotas los ejes de coordenadas, la representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:





****

4º) Encontrar la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 3). Encontrar los puntos de la recta x = y = z que están a distancia $d = \frac{1}{7}$ de este plano.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 2,\ 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 3) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 0,\ 3)$$

E plano π viene determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y cualquiera de los tres puntos, por ejemplo, el A(1, 0, 0):

$$\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 6(x-1) + 2z + 3y = 0\ ;;\ 6x - 6 + 2z + 3y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}}$$

Los puntos de la recta r tienen por expresión general P(x, x, x).

La distancia de un punto a una recta es $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando esta fórmula al plano π y al punto P, resulta:

$$d(P,\ \pi) = \frac{1}{7} = \frac{|6x + 3x + 2x - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|11x - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{|11x - 6|}{\sqrt{49}} = \frac{|11x - 6|}{7} \Rightarrow |11x - 6| = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 11x - 6 = 1 \\ 11x - 6 = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 11x = 7 \\ 11x = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \rightarrow\ x_1 = \frac{7}{11} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{A\left(\frac{7}{11},\ \frac{7}{11},\ \frac{7}{11}\right)}} \\ \rightarrow\ x_2 = \frac{5}{11} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{B\left(\frac{5}{11},\ \frac{5}{11},\ \frac{5}{11}\right)}} \end{array}$$

****