

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE BALEARES****SEPTIEMBRE - 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

**OPCIÓN A**

1º) Encontrar el punto de inflexión de la curva de ecuación  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ . Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

-----

Un punto de inflexión de una curva se encuentra en los puntos de abscisa que anulan la segunda derivada y que hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} = y'$$

$$y'' = -\frac{2x \cdot (x^2 - 1)^2 - (1 + x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{2x \cdot (x^2 - 1) - 4x \cdot (1 + x^2)}{(x^2 - 1)^3} =$$

$$= \frac{4x + 4x^3 - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = y''$$

$$y''' = \frac{(6x^2 + 6) \cdot (x^2 - 1)^3 - 2x(x^2 + 3) \cdot 3 \cdot (x^2 - 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^6} = \frac{(6x^2 + 6) \cdot (x^2 - 1) - 12x^2(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{6(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) - 12x^4 - 36x^2}{(x^2 - 1)^4} = \frac{6(x^4 - 1) - 12x^4 - 36x^2}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4} = y'''$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \quad ; ; \quad 2x(x^2 + 3) = 0 \quad ; ; \quad \underline{x = 0}$$

$$y'''(0) = -\frac{0+0+6}{(0-1)^4} = \frac{-6}{1} = -6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Punto de inflexión para } x=0}$$

$$y(0) = \frac{0}{0^2-1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P. I. \Rightarrow O(0, 0)}}$$

La tangente a una curva en un punto es la recta cuya pendiente es igual a la derivada de la función en ese punto.

$$y' = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -\frac{1+0^2}{(0^2-1)^2} = -\frac{1}{1} = \underline{\underline{-1 = m}}$$

Por ser el punto de inflexión el origen de coordenadas la tangente es la recta afín que pasa por el origen con pendiente -1, o sea:

$$\text{Tangente: } y = -x \ ; \ ; \ ; \ \underline{\underline{t \neq x + y = 0}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Calcular el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$  según los valores del parámetro  $k$ .

-----

El rango máximo que puede tener  $A$  es 3, por tener 3 filas.

El rango de  $A$  es, por lo menos 2, por ser  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$ . Veamos si tiene rango 3 para algún valor de  $k$ :

$$\{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - k^2 + 1 - k + 2k = -k^2 + k + 2 = 0 \quad ; ; \quad k^2 - k - 2 = 0$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{k_1 = 2} \quad ; ; \quad \underline{k_2 = -1}$$

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = k - 1 - 2 + 2k - 1 + 2 - 2k(k-1) = 3k - 2 - 2k^2 + 2k =$$

$$= -2k^2 + 5k - 2 = 0 \quad ; ; \quad 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \underline{k_1 = 2} \quad ; ; \quad \underline{k_3 = \frac{1}{2}}$$

$$\{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & -k & 2 \\ -1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = -k^2(k-1) - 1 + 2 - k + 2k + k - 1 = -k^3 + k^2 + 2k = 0 \quad ; ;$$

$$-k(k^2 - k - 2) = 0 \quad ; ; \quad \underline{k_4 = 0} \quad ; ; \quad k^2 - k - 2 = 0 \quad ; ; \quad \underline{k_1 = 2} \quad ; ; \quad \underline{k_2 = -1}$$

Para  $k = 2 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$  ; ; Para  $k \neq 2 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$

\*\*\*\*\*

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. Aplicarlo para demostrar que la ecuación  $x = \cos x$  tiene al menos una solución en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

-----

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

“Si una función  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ ”.

La ecuación  $x = \cos x$  se puede considerar como una función  $f(x) = x - \cos x$ .

La función  $f(x)$  es continua en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ , por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Se trata de encontrar dos valores finitos de  $x$ ,  $a$  y  $b$ , tales que:  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ :

Por ejemplo:

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0 \quad ; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función  $f(x) = x - \cos x$  tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  y, como consecuencia, la ecuación  $x = \cos x$  tiene al menos una solución positiva en el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

\*\*\*\*\*

4º) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano  $\pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0$  con los ejes de coordenadas.

-----

Los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes coordenados son:

$$X \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow A(2, 0, 0) \quad ; ; \quad Y \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow B(0, 2, 0) \quad ; ; \quad Z \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(0, 0, 1)$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 1) - (2, 0, 0) = (-2, 0, 1)$$

El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan dos vectores y el área del paralelogramo, a su vez, es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, por lo cual:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |2i + 4k + 2j| = \frac{1}{2} \cdot |2i + 2j + 4k| = |i + j + 2k| = \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} u^2 = S_{ABC} \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Calcular: a )  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right)$       b )  $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx$

-----

$$a ) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right) = \frac{1}{1-1} - \frac{1}{L1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xLx - (x-1)}{(x-1)Lx} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xLx - x + 1}{(x-1)Lx} = \frac{1L1 - 1 + 1}{(1-1)L1} = \frac{0+0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} - 1 + 0}{-1 \cdot Lx + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{Lx + 1 - 1}{-Lx + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{Lx}{1 - Lx - \frac{1}{x}} = \frac{L1}{1 - L1 - \frac{1}{1}} =$$

$$= \frac{0}{1 - 0 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{0 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{0 - x + 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$b ) \quad I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x=1 \rightarrow t=1+e \\ x=0 \rightarrow t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_1^{1+e} \frac{1}{t} \cdot dt = [Lt]_1^{1+e} =$$

$$= L(1+e) - L1 = L(1+e) - 0 = \underline{\underline{L(1+e)}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Resolver el sistema  $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ ax + 2y - z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases}$  cuando sea compatible indeterminado.

-----

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ a & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2a^2 + 1 + 4 + a + 2a = -2a^2 + 3a + 9 = 0 ; ; 2a^2 - 3a - 9 = 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} \Rightarrow \underline{a_1 = 3} ; ; \underline{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

Para  $\begin{cases} a_1 \neq 3 \\ a_2 \neq -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Deter minado}$

Veamos ahora el rango de M' para los valores hallados:

$$\text{Para } a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2 - C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 2}$$

Para  $a = 3 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indet er minado}$

$$\text{Para } a = -\frac{3}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix} = 6 - \frac{9}{4} - 2 + 2 + 3 + \frac{9}{2} = 9 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{36 - 9 + 18}{4} =$$

$$= \frac{9}{4} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

$$\text{Para } a = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$$

---

---

Resolvemos cuando  $a = 3$  (Compatible Indeterminado).

Para  $a = 3$  resulta el sistema  $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$ . Despreciando una de las ecuaciones

y parametrizando una de las incógnitas, resulta:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 + 2\lambda \\ 3x + 2y = 2 + \lambda \end{cases} \begin{cases} 2x - 2y = -2 + 4\lambda \\ 3x + 2y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 5x = 5\lambda \ ;;$$

$$\underline{x = \lambda} \ ;; \ x - y = -1 + 2\lambda \ ;; \ y = x + 1 - 2\lambda = \lambda + 1 - 2\lambda = \underline{1 - \lambda = y}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

---

---

\*\*\*\*\*

3º) Hallar las asíntotas y los extremos relativos de la función  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ . Hacer una gráfica aproximada de la función.

-----

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a infinito:

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0 = y \quad (\text{Eje } X)$$

Verticales: son los valores de  $x$  que anulan el denominador.

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad ; ; \quad x \notin R \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas verticales}}$$

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Para estudiar los extremos relativos, derivamos:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + x + 1) - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 + x + 1 - 2x^2 - x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \quad ; ; \quad 1 - x^2 = 0 \quad ; ; \quad \underline{x_1 = 1} \quad ; ; \quad \underline{x_2 = -1}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2 + x + 1)^2 - (1 - x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} = \\ &= \frac{-2x \cdot (x^2 + x + 1) - 2(1 - x^2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x^2 - 2x - 2(2x + 1 - 2x^3 - x^2)}{(x^2 + x + 1)^3} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x^2 - 2x - 4x - 2 + 4x^3 + 2x^2}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + x + 1)^3} = f''(x) \end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{2(1-3)}{(1^2 + 1 + 1)^3} = \frac{-4}{27} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo absoluto para } x = 1}$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } A\left(1, \frac{1}{3}\right)}}$$

$$f''(-1) = \frac{-2(1-3)}{(1-1+1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo absoluto para } x = -1}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{1-1+1} = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } B(-1, -1)}}$$

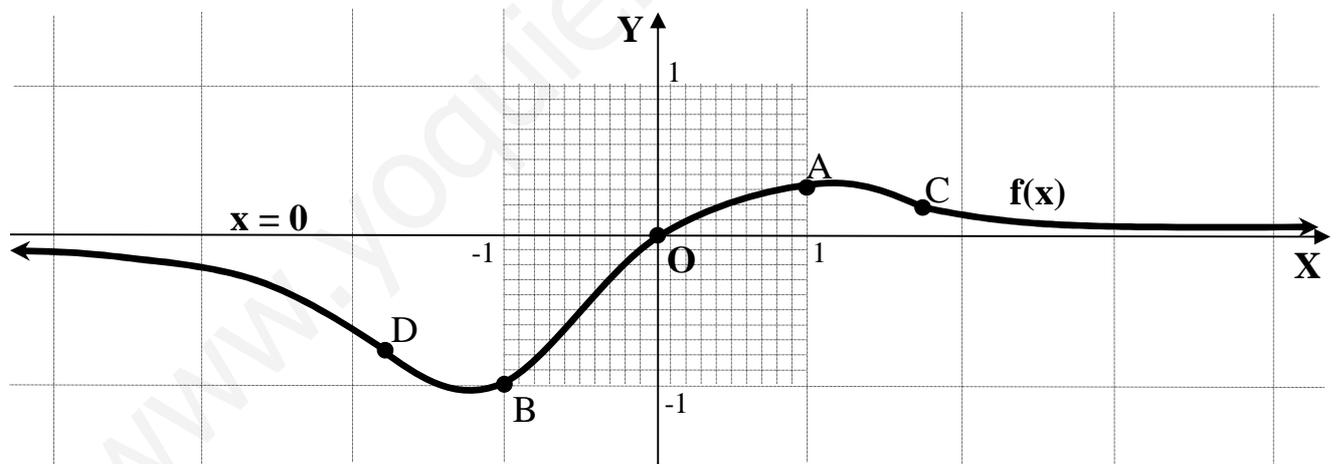
Siendo  $f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + x + 1)^3}$ , la función tiene puntos de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada, o sea,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{3}$  y  $x_3 = -\sqrt{3}$ ..

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.: } O(0, 0)}} \;; \; f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(4 - \sqrt{3})}{13} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.: } C\left(\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3} - 3}{13}\right) \cong (1'73, 0'30)}} \;; \; f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3} + 1} = \frac{-\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(4 + \sqrt{3})}{13} =$$

$$= \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{13} \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.: } D\left(-\sqrt{3}, \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{13}\right) \cong (-1'73, -0'76)}}$$

La representación aproximada de la función es la siguiente:



\*\*\*\*\*

4º) Sea el plano  $\pi$  que contiene a la recta  $r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$  y al punto  $P(3, 1, 2)$ . Estudiar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $s \equiv (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(1, 2, 3)$ . Hallar, si existe, el punto de intersección.

-----

Un punto de la recta  $r$  es  $A(2, 0, -1)$  y su vector director es  $\vec{v} = (-3, 2, 4)$ . Los puntos  $A$  y  $P$  determinan el vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (3, 1, 2) - (2, 0, -1) = (1, 1, 3)$ .

El plano  $\pi$  puede determinarse por el punto  $A$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 4(x-2) + 2(z+1) - 9y + 3(z+1) - 6(x-2) - 4y = 0 \quad ; ;$$

$$-2(x-2) - 13y + 5(z+1) = 0 \quad ; ; \quad -2x + 4 - 13y + 5z + 5 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 13y - 5z - 9 = 0}}$$

Un vector normal del plano es  $\vec{n} = (2, 13, -5)$  y el vector director de la recta  $s$  es  $\vec{w} = (1, 2, 3)$ .

Como puede observarse, los vectores  $\vec{n}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes, lo cual significa que

La recta  $s$  y el plano  $\pi$  son secantes

Un punto genérico de la recta  $s$  es  $Q(\alpha, 1+2\alpha, 3\alpha)$ . Si el punto  $Q$  pertenece al plano  $\pi$  tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 13y - 5z - 9 = 0 \\ Q(\alpha, 1+2\alpha, 3\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow 2\alpha + 13 \cdot (1+2\alpha) - 5 \cdot 3\alpha - 9 = 0 \quad ; ;$$

$$2\alpha + 13 + 26\alpha - 15\alpha - 9 = 0 \quad ; ; \quad 13\alpha + 4 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\alpha = -\frac{4}{13}}} \quad ; ; \quad 1 + 2\alpha = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q\left(-\frac{4}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)}}$$

\*\*\*\*\*