PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) De la familia de planos $\pi \equiv x+(k+1)y-z+2k=0$, hallar las ecuaciones de los que están a 2 unidades de distancia del punto P(1, 1, 1).

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicada al caso presente sería:

$$d(P,\ \pi)=\frac{|1\cdot 1+(k+1)\cdot 1-1\cdot 1+2k|}{\sqrt{1^2+(k+1)^2+(-1)^2}}=\frac{|1+k+1-1+2k|}{\sqrt{1+k^2+2k+1+1}}=\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+2k+3}}=2\ ;;$$

$$|3k+1|=2\sqrt{k^2+2k+3}\ ;;\ 9k^2+6k+1=4(k^2+2k+3)\ ;;\ 9k^2+6k+1=4k^2+8k+12\ ;;$$

$$5k^2-2k-11=0\ ;;\ k=\frac{2\pm\sqrt{4+220}}{10}=\frac{2\pm\sqrt{224}}{10}=\frac{2\pm 4\sqrt{14}}{10}=\frac{1\pm 2\sqrt{14}}{5}\Rightarrow\begin{cases}\underline{k_1=\frac{1+2\sqrt{14}}{5}}\\[2ex]\underline{k_2=\frac{1-2\sqrt{14}}{5}}\end{cases}$$

Los planos pedidos son los siguientes:

$$\pi_1\equiv x+\left(\frac{1+2\sqrt{14}}{5}+1\right)y-z+2\cdot\frac{1+2\sqrt{14}}{5}=0\ ;;\ x+\frac{6+2\sqrt{14}}{5}y-z+\frac{2+4\sqrt{14}}{5}=0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi_1\equiv 5x+2\left(3+\sqrt{14}\right)y-5z+2\left(1+2\sqrt{14}\right)=0}}$$

$$\pi_2 \equiv x + \left(\frac{1-2\sqrt{14}}{5} + 1 \right) y - z + 2 \cdot \frac{1-2\sqrt{14}}{5} = 0 \ \ ;; \ \ x + \frac{6-2\sqrt{14}}{5} y - z + \frac{2-4\sqrt{14}}{5} = 0 \ \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi_2 \equiv 5x + 2\left(3-\sqrt{14}\right)y - 5z + 2\left(1-2\sqrt{14}\right) = 0}}$$

****

2º) Una matriz 3 x 3 de números reales decimos que es triangular superior si $a_{ij} = 0$ siempre que i > j (es decir, si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son todos 0). Encontrar las matrices triangulares superiores A tales que verifiquen simultáneamente $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿No hay alguna que sea inversible?

Sea la matriz pedida $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} a+b+c \\ 0+d+e \\ 0+0+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ d+e=0 \\ \underline{f=0} \end{array}\right\} \;;;\; \underline{\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ d+e=0 \end{array}\right\} \quad (1)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 0+b+c \\ 0+d+e \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\left.\begin{array}{l} b+c=1 \\ d+e=0 \end{array}\right\} \quad (2)}$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes al sistema $\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ b+c=1 \\ d+e=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=-1}$

$$\left.\begin{array}{l} b+c=1 \\ d+e=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{c=1-b} \\ \underline{e=-d} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} -1 & b & 1-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \forall b, d \in R$$

<u>No puede existir ninguna matriz A que sea inversible</u>; ellos se debe a que el determinante de cualquier matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal y, en este caso, por ser el elemento $a_{33} = 0$, resulta siempre que $|A| = 0$.

****

3º) Se considera la función $f(x) = x \cdot e^x$. Se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Hacer una gráfica de la función.

----

a)

Se trata de una función continua en su dominio, que es R.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x (1 + x) \ ;; \ f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (1 + x) = 0 \ ;; \ 1 + x = 0 \ ;; \ \underline{x = -1}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente \ (-\infty, -1)}}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente \ (-1, +\infty)}}$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^x) = \infty \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^x) = -\infty \cdot e^{-\infty} = \frac{-\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = -\lim_{x \to -\infty} e^x = -e^{\infty} = \underline{\underline{-\infty}}$$

c)

Con objeto de facilitar la representación gráfica de la función vamos a determinar su punto máximo que, según el apartado a) se produce para x = -1, ya que la función es continua y pasa de ser creciente a decreciente para x = -1; no obstante, vamos a justificar analíticamente que se trata de un máximo.

$$f''(x) = e^x \cdot (1 + x) + e^x \cdot 1 = e^x (2 + x) \ ;; \ f''(-1) = e^{-1} (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \underline{Máximo, \ c.q.j.}$$

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: \ P\left(-1, -\frac{1}{e}\right)}$$

La concavidad, convexidad y punto de inflexión son:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2+x=0\ ;;\ \underline{x=-2} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \rightarrow y''>0 \Rightarrow \underline{\underline{Concava:(-2,\ \infty)}} \quad (\cap) \\ \\ x<-2 \rightarrow y''<0 \Rightarrow \underline{\underline{Convexa:(-\infty,\ -2)}} \quad (\cup) \end{cases}$$

$$f'''(x)=e^{x}\cdot(3+x) \Rightarrow f'''(-2)=e^{-2}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P.\ I.\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)}}$$

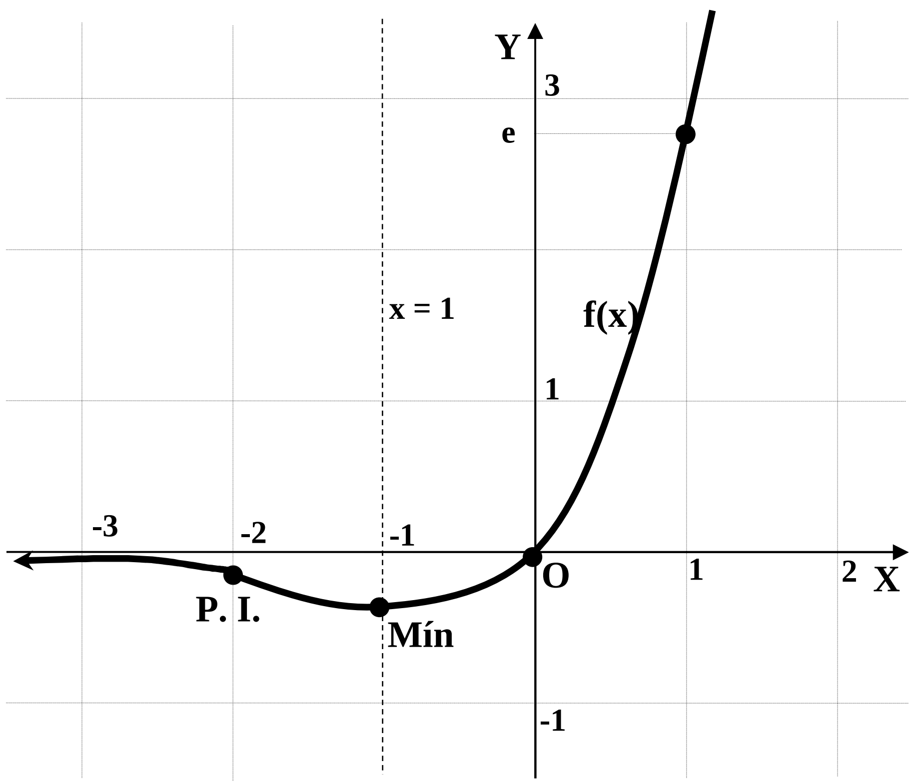
$$f(-2)=-2\cdot e^{-2}=-\frac{2}{e^2} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$$

Para x = 0, y = 0. La función pasa por el origen de coordenadas.

Del apartado b) se deduce que la curva tiene una asíntota horizontal en el eje de abscisas.

Para la representación gráfica formamos una tabla de valores que nos facilite su ejecución:

x	0	-1	1	1	2
y	0	$-\frac{1}{e}$	$-\frac{2}{e^2}$	e	$2e^2$
		Mín	P. I.		



****

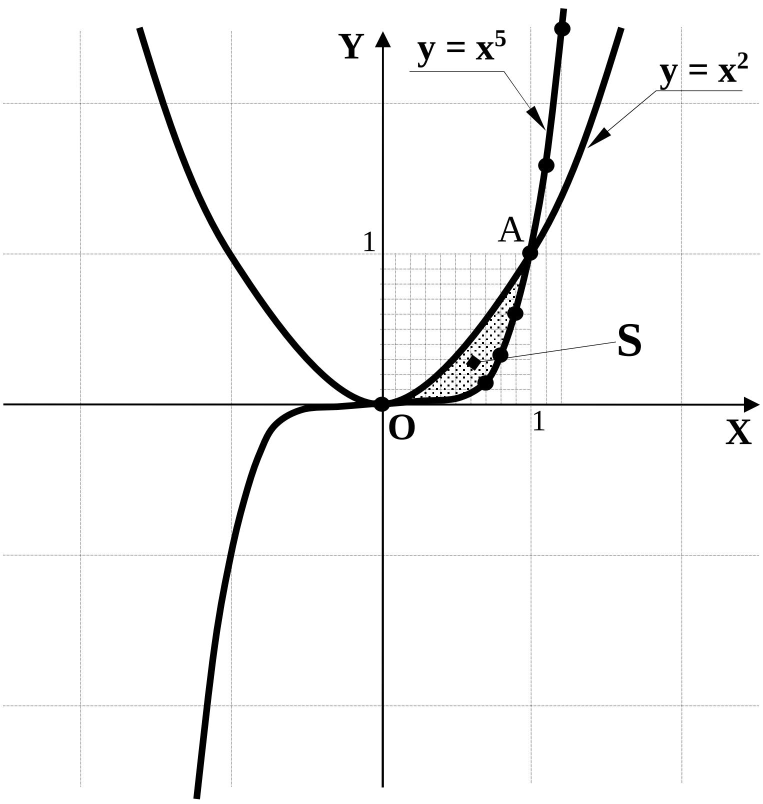
4º) Hacer un dibujo de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^5$, y calcular su área. Hallar también las ecuaciones de las rectas tangentes a estas curvas en sus puntos de corte.

Los puntos de corte de ambas funciones son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x^5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x^5 \;;;\; x^5 - x^2 = 0 \;;;\; x^2\left(x^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{A(1,\ 1)} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $y = x^2$ es una función par y $y = x^5$ es una función impar, la primera es simétrica con respecto al eje de ordenadas y la segunda es simétrica con respecto al origen.

La representación gráfica de la situación, con cierta aproximación, es la siguiente:



Para la curva $y = x^5$ se ha utilizado la siguiente tabla de valores aproximados:

x	0'7	0'8	0'9	1'1	1'2
y	0'2	0'3	0'6	1'6	2'5

Teniendo en cuenta que las ordenadas de la curva $y = x^2$ son mayores que las de la curva $y = x^5$ en el intervalo del área pedida, es:

$$S = \int_0^1 \left(x^2 - x^5\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \underline{\underline{\frac{2}{15}\ u^2 = S}}$$

Las tangentes a las funciones en sus puntos de corte son las siguientes, teniendo en cuenta que la pendiente en los puntos de corte es el valor de la derivada en ese punto y que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$Curva \quad y = x^2 \;\; ;; \;\; y' = 2x \;\; \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \;\rightarrow\; \underline{m_1 = 0} \\ \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; \underline{m_2 = 2} \end{cases}$$

$$t_1 \;\Rightarrow\; y - 0 = 0(x - 0) \;\; ;; \;\; \underline{\underline{t_1 \equiv y = 0}} \;\; (Eje \;\; de \;\; abscisas)$$

$$t_2 \;\Rightarrow\; y - 1 = 2(x - 1) = 2x - 2 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{t_1 \equiv 2x - y - 1 = 0}}$$

$$Curva \quad y = x^5 \;\; ;; \;\; y' = 4x^4 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \;\rightarrow\; \underline{m_1 = 0} \\ \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; \underline{m_2 = 4} \end{cases}$$

$$t_1 \;\Rightarrow\; y - 0 = 0(x - 0) \;\; ;; \;\; \underline{\underline{t_1 \equiv y = 0}} \;\; (Eje \;\; de \;\; abscisas)$$

$$t_3 \;\Rightarrow\; y - 1 = 4(x - 1) = 4x - 4 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{t_1 \equiv 4x - y - 3 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Hacer una gráfica aproximada de la función.

Asíntotas horizontales: son los valores finitos de la función cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{y=0}} \ \ (\textit{Eje de abscisas})$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función valga más o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$x^2+1 \neq 0, \ \forall x \in R \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\textit{No tiene asíntotas verticales}}}.$$

Asíntotas oblicuas: No tiene. (para que una función tenga asíntotas oblicuas es necesario que sea racional y el grado del denominador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Los máximos y mínimos relativos de la función son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \ \ ;; \ \ (1+x)(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=1} \\ \underline{x_2=-1} \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)-4x\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=\underline{\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=f''(x)}$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-4}{8}<0 \ \Rightarrow \ \underline{\textit{Máximo}} \ \Rightarrow \ f(1)=\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P\left(1, \ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0 \ \Rightarrow \ \underline{\textit{Mínimo}} \ \Rightarrow \ f(-1)=-\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Q\left(-1, \ -\frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=\sqrt{3}} \\ \underline{x_3=-\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$f'''(x)=\frac{\left(6x^2-6\right)\left(x^2+1\right)^3-\left(2x^3-6x\right)\cdot 3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^6}=\frac{\left(6x^2-6\right)\left(x^2+1\right)-6x\left(2x^3-6x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

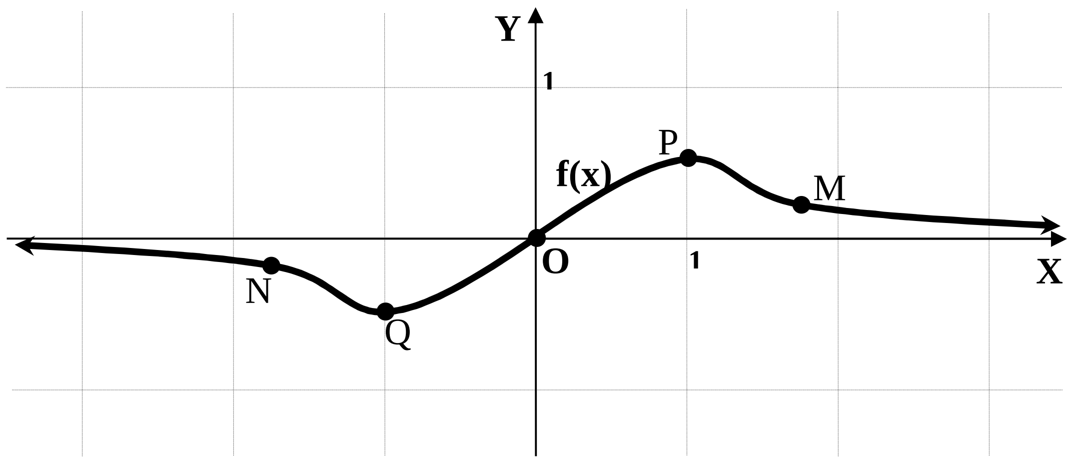
$$=\frac{6x^4+6x^2-6x^2-6-12x^4+36x^2}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-6x^4+36x^2-6}{\left(x^2+1\right)^4}=\underline{\frac{-6\left(x^4-6x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=f'''(x)}$$

$$f'''(0)=\frac{-6}{2}\neq 0 \Rightarrow P.\ \ Inflexión\ \ ;;\ \ f(0)=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{O(0,\ 0)}}$$

$$f'''\left(\sqrt{3}\right)=\frac{-6(9-18+1)}{16}\neq 0 \Rightarrow P.\ \ Inflexión\ \ ;;\ \ f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

$$f'''\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-6(9-18+1)}{16}\neq 0 \Rightarrow P.\ \ Inflexión\ \ ;;\ \ f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{N\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



****

2º) Sabemos que las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+k}{3} = \frac{z-1}{-2}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-k}{3}$ se cortan en un punto. Hallar el valor de k y la ecuación en forma general del plano que determinan.

Existen varias formas de hacer el ejercicios.

Una forma: Un punto de r es A(-1, -k, 1) y un punto de s es B(0, -3, k) y los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 3,\ -2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ 2,\ 3)$.

Si las rectas se cortan, determinan un plano, por lo tanto los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ son coplanarios, es decir: su rango es dos.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ -3,\ k) - (-1,\ -k,\ 1) = (1,\ k-3,\ k-1).$$

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & k-3 & k-1 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$4(k-1) - 2(k-3) + 9 + 4 - 6(k-3) - 3(k-1) = 0\ ;;\ (k-1) - 8(k-3) + 13 = 0\ ;;$$

$$k - 1 - 8k + 24 + 13 = 0\ ;;\ 7k = 36\ ;;\ \underline{\underline{k = \frac{36}{7}}}$$

Otra forma: Si las rectas se cortan, el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas que determinan tiene que ser compatible determinado, es decir: los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada tienen que ser iguales e iguales a tres.

La expresión de ambas rectas por unas ecuaciones implícitas es:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+k}{3} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 2y + 2k \\ -2x - 2 = 2z - 2 \end{cases}\ ;;\ \underline{r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + (3-2k) = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}}$$

$$s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-k}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y + 3 \\ 3x = z - k \end{cases}\ ;;\ \underline{s \equiv \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x - z + k = 0 \end{cases}}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ ;;\ M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 3-2k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

$$Tiene\ \ que\ \ ser\ \ |M'| = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 3-2k \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \{C_1 \to C_1 - C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 3-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3-2k \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ -3k + 24 + 4(3-2k) + 4k = 0$$

$$k + 24 + 12 - 8k = 0 \ ;; \ 36 = 7k \ ;; \ \underline{\underline{k = \frac{36}{7}}}$$

Tomando, por ejemplo, el punto de la recta s es $B\left(0,\ -3,\ \frac{36}{7}\right)$, el plano π se puede determinar por el punto P y por los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$.

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-\frac{36}{7} \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ \begin{vmatrix} 7x & 7y+21 & 7z-36 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$63x + 4(7z-36) - 2(7y+21) - 3(7z-36) + 28x - 6(7y+21) = 0 \ ;;$$

$$91x + (7z-36) - 8(7y+21) = 0 \ ;; \ 91x + 7z - 36 - 56y - 168 = 0 \ ;; \ 91x + 7z - 56y - 204 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 91x - 56y + 7z - 204 = 0}}$$

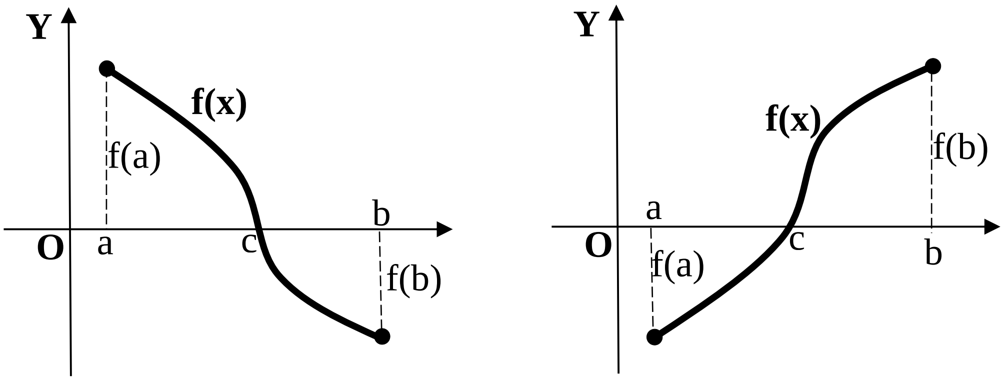
****

3º) Se considera la ecuación $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$. Utilizando el Teorema de Bolzano, demostrar que:

a) Si m > -3 entonces la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2

b) si m < -3 entonces la ecuación tiene al menos una raíz real mayor que 2.

El teorema de Bolzano dice que "Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".



a)

Considerando la función $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$, que es continua en su dominio, que es R, puesto que es polinómica $\forall \lambda \in R$, por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano a cualquier intervalo real considerado.

Considerando la función para m = - 3, $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$, observamos que se anula para x = 2: $f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 = 8 + 4 - 6 - 6 = 0$.

Considerando la función derivada $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$, que es $f'(x) > 0,\ \forall x \in R,$ $x > 1$, lo que significa que es creciente en el intervalo $(1,\ +\infty)$. Esto significa que si la función se anula para x = 2 y es creciente en el intervalo indicado, para cualquier valor de m > - 3 se cumple necesariamente que f(2) > 0. En resumen : f(0) < 0 y f(2) > 0, lo cual demuestra que, en efecto, si m > - 3 la ecuación tiene al menos una raíz real mayor que 2.

b)

Lo pedido en este apartado es equivalente a demostrar que la función f(x) considerada anteriormente tiene una raíz real mayor que 2, para valores de m < - 3.

Si la función se anula para x = 2 y es creciente en el intervalo indicado anteriormente $(1,\ +\infty)$, para cualquier valor de m < - 3 se cumple necesariamente que f(2) < 0.

Por otra parte, es fácil comprender que siendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, basta con dar a x un valor suficientemente grande, por ejemplo, x = 4, para que sea f(4) > 0.

En resumen : f(2) < 0 y f(4) > 0, lo cual demuestra que, en efecto, si m < - 3 la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.

****

4º) Determinar todas las matrices X, tales que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X$.

Sea la matriz pedida $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Operando:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} a+b & a-2b \\ c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & a+d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b = a+c \rightarrow \underline{b=c} \\ a-2b = a+d \rightarrow \underline{d=-2b} \\ c+d = a-2c \rightarrow a = 3c+d = 3b-2b = \underline{b=a} \\ c-2d = b-2d \rightarrow \underline{b=c} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=b=c}} \;;\; \underline{\underline{d=-2a}}$$

Las matrices pedidas son de la forma: $\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -2a \end{pmatrix} \; \forall a \in R, \; \{a \neq 0\}}}$

****