

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE BALEARES****SEPTIEMBRE - 2004**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Determinar el punto de inflexión de abscisa positiva de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto. ¿Cuál es la posición de la curva respecto de la recta tangente?

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} ; ;$$

$$y'' = \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2 \cdot (1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = y''$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0 ; ; 3x^2 - 1 = 0 ; ; x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} ; ; x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para que exista el punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para ese valor:

$$y''' = \frac{12x \cdot (1+x^2)^3 - (6x^2 - 2) \cdot 3 \cdot (1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6} = \frac{12x \cdot (1+x^2) - 6x \cdot (6x^2 - 2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} = \frac{24x - 24x^3}{(1+x^2)^4} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = y'''$$

$$y'''_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^4} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P. I. para x = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

$$y_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)}}$$

La recta que pasa por el punto de inflexión tiene por pendiente el valor de la primera derivada para ese punto:

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow m = y'_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{16} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} = m$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{3}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad ; ; \quad 8y - 6 = -3\sqrt{3} \left(\frac{3x - \sqrt{3}}{3}\right) \quad ; ;$$

$$8y - 6 = -\sqrt{3}(3x - \sqrt{3}) \quad ; ; \quad 8y - 6 = -3\sqrt{3}x + 3 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{t \equiv 3\sqrt{3}x + 8y - 9 = 0}}$$

Para interpretar la posición de la tangente con respecto a la curva, estudiamos la concavidad y convexidad de la misma en el entorno del punto de inflexión estudiado:

$$y'' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow \text{Cóncava } (\cap) \\ \text{Para } x > \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow \text{Convexa } (\cup) \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que:

A la izquierda del punto de inflexión está la curva por encima de la recta y a la derecha, al contrario.

2º) Decir para que valores de k el siguiente sistema es compatible determinado. ¿Cómo es el sistema para k = 2?

$$\left. \begin{aligned} (1-k)x + (2k+1)y + (2k+2)z &= k \\ kx + ky &= 2k+2 \\ 2x + (k+1)y + (k-1)z &= 9 - 2k + k^2 \end{aligned} \right\}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, es necesario que la matriz de coeficientes tenga rango tres, igual que la matriz ampliada y también igual al número de incógnitas; es decir, que el determinante de la matriz de coeficientes tiene que ser distinto de cero:

$$M = \begin{pmatrix} 1-k & 2k+1 & 2k+2 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & k-1 \end{pmatrix} ; ; |M| = \begin{vmatrix} 1-k & 2k+1 & 2k+2 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 2k+1 & 2k+2 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & k-1 \end{vmatrix} = k(1-k)(k-1) + 2k(k+1)^2 - 4k(k+1) - k(k-1)(2k+1) =$$

$$= k(k-1-k^2+k) + 2k(k^2+2k+1) - 4k^2 - 4k - k(2k^2+k-2k-1) =$$

$$= -k^3 + 2k^2 - k + 2k^3 + 4k^2 + 2k - 4k^2 - 4k - 2k^3 + k^2 + k = -k^3 + 3k^2 - 2k =$$

$$= -k(k^2 - 3k + 2) = 0 ; ; \underline{k_1 = 0}$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0 ; ; k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{k_2 = 2} ; ; \underline{k_3 = 1}$$

El sistema es Compatible Determinado $\forall k \in R$, tal que $\{k \neq 0, k \neq 2, k \neq 1\}$

Para k = 2 el sistema resulta:

$$\left. \begin{aligned} -x + 5y + 6z &= 2 \\ x + y &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

La matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Veamos cuál es su rango:

$$\{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 6 + 30 - 4 + 9 - 45 = 26 - 49 = -13 \neq 0$$

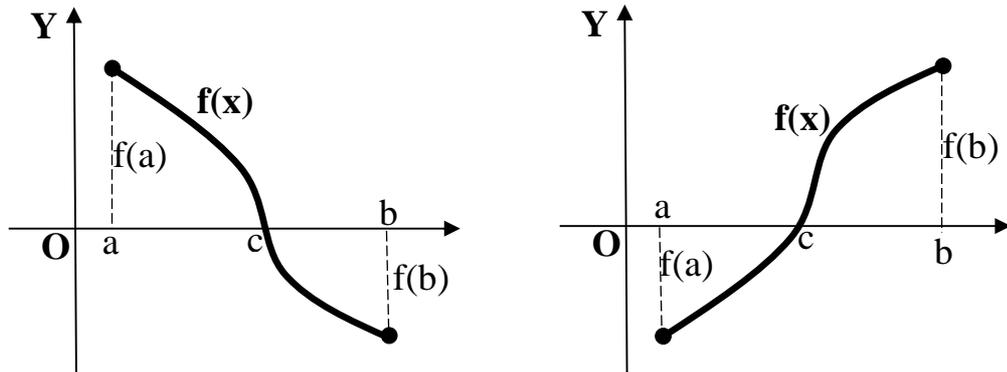
El rango de la matriz ampliada es 3.

Para $k = 2 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

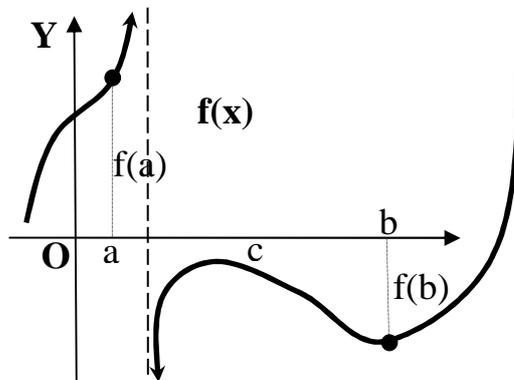
3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. Dar un ejemplo que demuestre que el Teorema de Bolzano requiere que la función sea continua en el intervalo $[a, b]$.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

“Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$ ”.



Si una función f no es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, no se puede asegurar que exista al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$; esto es evidente en el grafico siguiente:



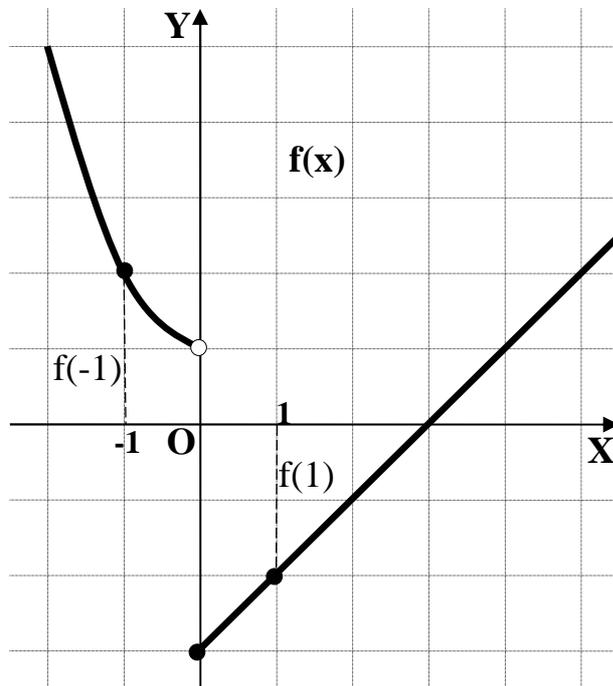
Como puede observarse, la función $f(x)$ cumple las condiciones del teorema, excepto la de ser continua, y en este caso no existe ningún valor del intervalo $[a, b]$ para el cual se anule la función.

Un ejemplo puede ser la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ -x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

En los extremos del intervalo la función toma valores de distinto signo:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 > 0 \quad ; \quad ; \quad f(1) = 1 - 3 = -2 < 0$$

Sin embargo no existe ningún valor $c \in (-1, 1)$ para el cual se anule la función, como puede comprobarse en el gráfico siguiente.



4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-a}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$, calcular el valor de a de tal manera que las rectas se corten. Determinar el punto de corte.

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta s es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \begin{cases} y-z=-\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases} \rightarrow y=z-\lambda = \underline{1-3\lambda} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de cada una de las rectas pueden ser:

$$\text{Recta } r \Rightarrow \begin{cases} \underline{\vec{u} = (-2, -1, 2)} \\ \underline{A(a, -1, -1)} \end{cases} \quad ; ; \quad \text{Recta } s \Rightarrow \begin{cases} \underline{\vec{v} = (1, -3, -2)} \\ \underline{B(0, 1, 1)} \end{cases}$$

El vector \vec{w} que tenga como origen el punto de r , $A(a, -1, -1)$ y como extremo el punto de s , $B(0, 1, 1)$ es:

$$\vec{w} = \vec{AB} = B - A = (0, 1, 1) - (a, -1, -1) = \underline{(-a, 2, 2)} = \vec{w}$$

Si los tres vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son coplanarios, las rectas están en un mismo plano y (como no son paralelas) se cortan, por tanto es necesario que el determinante que forman los tres vectores sea nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -a & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 12 + 4 - 2a - 6a - 8 + 2 = 0 \quad ; ; \quad -8a + 10 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{a = \frac{5}{4}}}$$

El punto de corte se puede obtener sustituyendo en r los valores de x , y , z de s :

$$r \equiv \frac{\lambda - \frac{5}{4}}{-2} = \frac{1 - 3\lambda + 1}{-1} = \frac{1 - 2\lambda + 1}{2} \Rightarrow \frac{2 - 3\lambda}{-1} = \frac{2 - 2\lambda}{2} \quad ; ; \quad 2 - 3\lambda = -1 + \lambda \quad ; ;$$

$$3 = 4\lambda \quad ; ; \quad \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ x = \frac{3}{4} \quad ; ; \quad y = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} \quad ; ; \quad z = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)}}$$

OPCIÓN B

1º) Se considera la función $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$, con $0 < a < b < c$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

De la observación de la función expresada factorialmente se deduce que:

$$f(0) = f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

Como $f(x)$ es una función polinómica es continua en su dominio que es \mathbb{R} , por lo cual le es aplicable el Teorema de Rolle a cualquier intervalo finito.

Aplicando sucesivamente el Teorema de Rolle:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists m \in (0, a) \Rightarrow f'(m) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m \text{ es una raíz real de } f'(x)}}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists n \in (a, b) \Rightarrow f'(n) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{n \text{ es una raíz real de } f'(x)}}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(b) = 0 \\ f(c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists p \in (b, c) \Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p \text{ es una raíz real de } f'(x)}}$$

2º) Calcular los puntos de la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ que equidistan de los siguientes planos: $\pi \equiv 3x + 4y = 1$ y $\pi' \equiv 4x - 3z = 1$.

La recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta r es $P(-1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda, 2\lambda)$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicando la fórmula a los planos π y π' :

$$d(P, \pi) = \frac{|3(-1 + 2\lambda) + 4(1 + 3\lambda) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} \quad ;; \quad d(P, \pi') = \frac{|4(-1 + 2\lambda) - 3(2\lambda) - 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} \quad ;;$$

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \Rightarrow \frac{|-3 + 6\lambda + 4 + 12\lambda - 1|}{5} = \frac{|-4 + 8\lambda - 6\lambda - 1|}{5} \quad ;;$$

$$|18\lambda| = |2\lambda - 5| \Rightarrow \begin{cases} 18\lambda = 2\lambda - 5 \quad ;; \quad 16\lambda = -5 \quad ;; \quad \lambda_1 = -\frac{5}{16} \\ 18\lambda = -2\lambda + 5 \quad ;; \quad 20\lambda = 5 \quad ;; \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{16} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\lambda = -1 - \frac{5}{8} = -\frac{13}{8} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \\ z = 2\lambda = -\frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(-\frac{13}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{5}{8}\right)}}$$

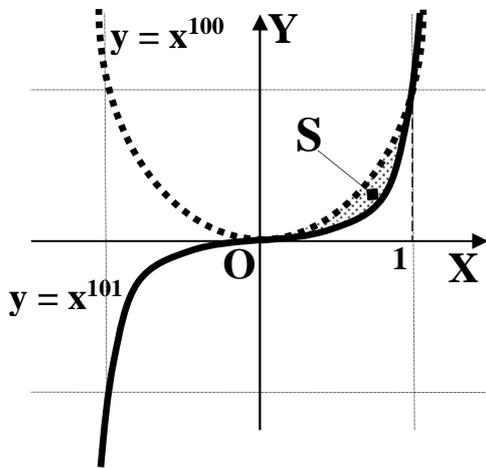
$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\lambda = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ z = 2\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)}}$$

3º) Hacer un dibujo del recinto limitado por las curvas $y = x^{100}$ e $y = x^{101}$. Calcular el área de este recinto.

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^{100} \\ y = x^{101} \end{array} \right\} \Rightarrow x^{100} = x^{101} \quad ; ; \quad x^{100} - x^{101} = 0 \quad ; ; \quad x^{100}(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{100} = 0 \rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ 1-x = 0 \rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow \underline{A(1, 1)} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la primera función es par y la segunda impar, es decir, que son simétricas con respecto al eje Y la primera y con respecto al origen la segunda, la representación gráfica es, aproximadamente, la indicada en la figura.



Para determinar el área tendremos en cuenta que en el intervalo $(0, 1)$ todas las ordenadas de la función $y = x^{100}$ son mayores que las de la función $y = x^{101}$, como a continuación se demuestra, tomando un valor intermedio del intervalo:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^{100} \Rightarrow y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \\ y = x^{101} \Rightarrow y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{101} = \frac{1}{2^{101}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^{100} > x^{101}, \\ \forall x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$S = \int_0^1 x^{100} \cdot dx - \int_0^1 x^{101} \cdot dx = \int_0^1 (x^{100} - x^{101}) \cdot dx = \left[\frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \right]_0^1 = \left(\frac{1^{101}}{101} - \frac{1^{102}}{102} \right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{102 - 101}{101 \cdot 102} = \frac{1}{10302} u^2 = S$$

4º) Determinar todas las matrices A, tales que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$. De estas matrices, determinar las que tienen la suma de todos sus elementos igual a cero.

Sea la matriz pedida $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; sería: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;;

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b = a+c \\ a = b+d \\ c+d = a \\ \underline{c = b} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} ; ; \forall \{a, b\} \in R}}$$

Las matrices cuya suma de todos sus elementos es cero son:

$$a + 2b + a - b = 0 ; ; 2a + b = 0 ; ; \underline{b = -2a} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -2a & 3a \end{pmatrix}}}$$
