PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Estudiar el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$, según los valores de m y resolverlo para m = -1.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}=m^2+1-(m+1)=m^2+1-m-1=m(m-1)=0 \Rightarrow \underline{m_1=0} \;;;\; \underline{m_2=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

Veamos el rango de M’ para los valores hallados anteriormente:

$$Para\ m=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_2\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ m=0 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para \;\; m=1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; de \;\; M' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m=1 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M \neq Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

Resolvemos para m = -1 (C. D.). Es sistema resulta $\begin{cases} x+y=1 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

De la primera ecuación: $x=1-y$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

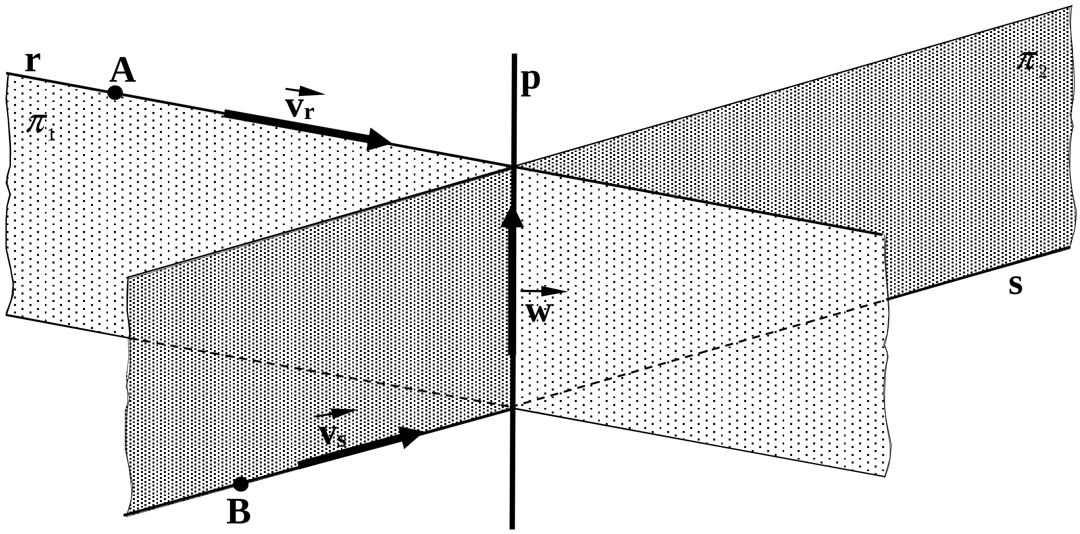
$$\left.\begin{array}{l} -y+z=0 \\ 1-y-z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -y+z=0 \\ -y-z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2y=-1 \;;;\; \underline{y=\frac{1}{2}} \;;;\; -y+z=0 \;;;\; y=\underline{z=\frac{1}{2}} \;;;$$

$$x=1-\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{2}=x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \; x=y=z=\frac{1}{2}}}$$

****

2º) Encontrar la ecuación de la recta p que corta perpendicularmente a las rectas r y s cuyas ecuaciones son $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x = y + 1 = 2z - 2$.



La situación del problema se refleja en el gráfico anterior.

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta p es el siguiente:

1.- Determinamos los puntos $A \in r$ y $B \in s$: <u>A(0, 0, 0)</u> y <u>B(0, -1, 1)</u>.

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 1)}$ y $\underline{\overrightarrow{v_s} = (2,\ 2,\ 1)}$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + 2k - 2k - 2i - j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (-1,\ 1,\ 0)}$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -y + z + z - x \ ;;\ \underline{\pi_1 \equiv x + y - 2z = 0}$$

$$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2(z-1) - (y+1) + 2(z-1) - x = 0 \ ;;$$

$$2z - 2 - y - 1 + 2z - 2 - x = 0 \ ;;\ -x - y + 4z - 5 = 0 \ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv x + y - 4z + 5 = 0}$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$p \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{Lx}{x^n}$, donde n es un número natural. Se pide:

a) Hallar los extremos relativos de la función f(x).

b) Calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Hacer una gráfica de la función en el caso de n = 2.

----

a)

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^n - Lx \cdot n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{x^{n-1}(1-nLx)}{x^{2n}}=\frac{1-nLx}{x^{2n-n+1}}=\underline{\frac{1-nLx}{x^{n+1}}=f'(x)}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{n}{x}\cdot x^{n+1}-(1-nLx)\cdot(n+1)\cdot x^n}{x^{2n+2}}=\frac{x^n\left[-n-(1-nLx)(n+1)\right]}{x^{2n+2}}=$$

$$=\frac{-n-\left(n+1-n^2Lx-nLx\right)}{x^{2n+2}}=\frac{-n-n-1+n^2Lx+nLx}{x^{2n+2}}=\underline{\frac{nLx\cdot(n+1)-1}{x^{2n+2}}=f''(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-nLx}{x^{n+1}}=0\ ;;\ 1-nLx=0\ ;;\ 1=nLx\ ;;\ Lx=\frac{1}{n}\ ;;\ \underline{x=\sqrt[n]{e}}$$

$$f''\left(\sqrt[n]{e}\right)=\frac{n\cdot\frac{1}{n}\cdot(n+1)-1}{\left(\sqrt[n]{e}\right)^{2n+2}}=\frac{1\cdot(n+1)-1}{e^{\frac{2n+2}{n}}}=\frac{n}{e^{2+\frac{2}{n}}}=\frac{n}{e^2\sqrt[n]{e^2}}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=\sqrt[n]{e}}$$

$$f\left(\sqrt[n]{e}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{\left(\sqrt[n]{e}\right)^n}=\frac{1}{ne}\quad \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo \Rightarrow P\left(\sqrt[n]{e},\ \frac{1}{ne}\right)}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{Lx}{x^n}=\frac{-\infty}{0^n}\Rightarrow Indet. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n\cdot x^n}=$$

$$=\frac{1}{n\cdot 0^n}=\frac{1}{0}=\underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{Lx}{x^n}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n \cdot x^n} = \frac{1}{n \cdot \infty^n} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

c)

Para n = 2 la función es $f(x) = \frac{L\,x}{x^2}$.

El punto mínimo es $P\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2e}\right)$ y el eje de ordenadas es una asíntota de la función en su parte positiva.

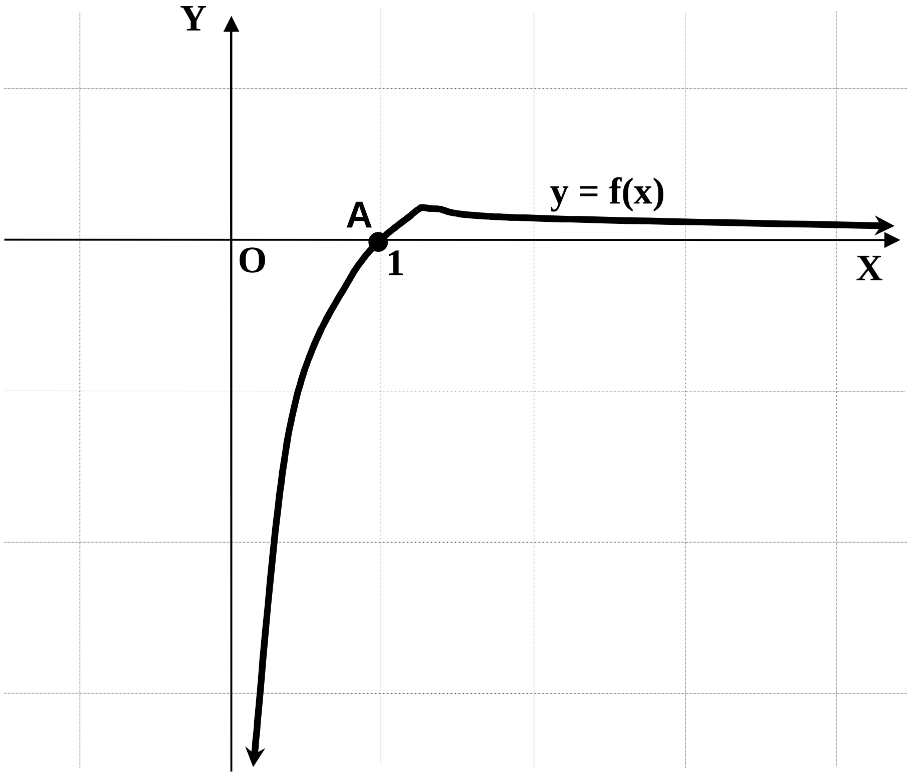
El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow (0,\ +\infty)$.

Para x = 1 se anula la función, lo cual indica que pasa por A(1, 0).

Para x = 2 el valor de la segunda derivada es $f''(x) = \frac{6\,L\,x - 1}{x^6}$ que se anula para $6\,L\,x - 1 = 0\ \ ;;\ \ L\,x = \frac{1}{6}\ \ ;;\ \ x = \sqrt[6]{e} \cong 1'18$.

$$f\left(\sqrt[n]{e}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt[6]{e^2}} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{e}} = \frac{\sqrt[3]{e^2}}{6e} \equiv 0'12 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P.\ I.\ \Rightarrow\ Q\left(\sqrt[6]{e},\ \frac{\sqrt[3]{e^2}}{6e}\right) \equiv (1'18,\ 0'12)}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) Enunciar el Teorema de Rolle. Demostrar que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple las hipótesis del teorema en el intervalo [0, 1] cualquiera que sea el valor de a. Determinar el punto en el cual se cumple la tesis.

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

La función $f(x) = x^3 - x + a$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, independientemente del valor de a, por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $[0,\ 1]$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x) = x^3 - x + a \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = a \\ \\ f(1) = 1^3 - 1 + a = a \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(0) = f(1),\ \forall a \in R,\ c.q.d.}}$$

Vamos a determinar el punto que satisface el teorema.

$$f(x) = x^3 - x + a \ \Rightarrow \ f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ 3x^2 = 1 \ ;; \ x^2 = \frac{1}{3} \ ;; \ \underline{x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}} \ ;; \ \underline{x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Como el valor de x_2 no pertenece al intervalo dado, la solución es:

$$\underline{\underline{c = \frac{\sqrt{3}}{3}}} \quad (0 < c < 1)$$

****

OPCIÓN B

1º) Una matriz cuadrada se llama ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Se pide:

a) Demostrar que una matriz de la forma $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ \alpha\in R$, es ortogonal.

b) Calcular x e y de manera que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ sea ortogonal.

----

a)

La matriz inversa de M es la siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos^2 x+sen^2 x=\underline{1}\ ;;\ M^T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & sen\ \alpha \\ -sen\ \alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Por ser $|M|=1$, la matriz adjunta de M^T coincide con su inversa, por lo cual:

$$\underline{\underline{M^{-1}=Adj.(M^T)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & sen\ \alpha \\ -sen\ \alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=M^T,\ c.q.d.}}$$

b)

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y\end{pmatrix}\ ;;\ |A|=y\ ;;\ Adj\ (M^T)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 \\ x & y\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0 \\ 0 & y\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1 \\ 0 & x\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & 0 \\ x & y\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & y\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & x\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$Adj\ (M^T)=\begin{pmatrix}y & 0 & 0 \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ ;;\ \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}}$$

$$A^T=A^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=0}}\ ;;\ \underline{\underline{y=1}}$$

****

2º) Estudiar, según los valores de k, la posición relativa de los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv (k-2)x + y + (2k+1)z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x + (k-1)y - z = 0$. Encontrar la ecuación continua de la recta r, intersección de los planos π_1 y π_2 en el caso de k = -1.

Los vectores normales de los planos son los siguientes:

$$\overrightarrow{n_1} = (k-2,\ 1,\ 2k+1) \ \ y \ \ \overrightarrow{n_2} = (2,\ k-1,\ -1)$$

Para que los planos sean paralelos tienen que ser paralelos los vectores normales:

$$\frac{k-2}{2} = \frac{1}{k-1} = \frac{2k+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k-2}{2} = \frac{1}{k-1} \ ;; \ k^2 - k - 2k + 2 = 2 \ ;; \ k^2 - 3k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{k = 0} \\ k = 3 \end{cases} \\ \frac{k-2}{2} = \frac{2k+1}{-1} \ ;; \ -k + 2 = 4k + 2 \ ;; \ 0 = 5k \ ;; \ \underline{k = 0} \end{cases}$$

Para k = 0 resultan los planos $\pi_1 \equiv -2x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x - y - z = 0$, que no son coincidentes, por lo tanto:

<u>Los planos son paralelos para k = 0</u>

Los planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales. Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow (k-2,\ 1,\ 2k+1) \cdot (2,\ k-1,\ -1) = 0 \ ;; \ 2k - 4 + k - 1 - 2k - 1 = 0 \ ;;$$

$$k - 6 = 0 \ ;; \ \underline{k = 6}$$

<u>Para k = 6 los planos son perpendiculares.</u>

$$\underline{\underline{Los\ \ planos\ \ son\ \ \text{sec}antes\ \ \forall k \in R,\ \ k \neq 0.}}$$

Para k = -1 los planos son $\pi_1 \equiv -3x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x - 2y - z = 0$ y la expresión de la recta por don ecuaciones implícitas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}}$

La expresión continua de r es como sigue:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -y + z = 1 - 3\lambda \\ -2y - z = -2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow -3y = 1 - 5\lambda \ ;; \ \underline{y = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\lambda}$$

$$-y + z = 1 - 3\lambda \ ;; \ \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\lambda + z = 1 - 3\lambda \ ;; \ z = 1 - 3\lambda - \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\lambda = \underline{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\lambda = z}$$

Un vector director de r puede ser $\overrightarrow{v} = (3,\ 5,\ -4)$ y un punto es $P\left(0,\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

La ecuación continua de r es: $\frac{x-0}{3} = \frac{y+\frac{1}{3}}{5} = \frac{z-\frac{2}{3}}{-4}$. Operando y simplificando:

$$\frac{x}{3} = \frac{\frac{3y+1}{3}}{5} = \frac{\frac{3z-2}{3}}{-4} \;;;\; \frac{x}{3} = \frac{3y+1}{15} = \frac{3z-2}{-12}$$

$$\underline{\underline{r \equiv x = \frac{3y+1}{5} = \frac{3z-2}{-4}}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$. Se pide:

a) Hallar los extremos relativos de la función f(x).

b) Calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

c) Hacer una gráfica de la función.

----

a)

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{x\cdot e^x(2-x)}{e^{2x}}=\underline{\frac{x(2-x)}{e^x}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=2} \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot e^x-x(2-x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2-2x-2x+x^2}{e^x}=\underline{\frac{x^2-4x+2}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín(0,\ 0)}}$$

$$f''(2)=\frac{2^2-4\cdot 2+2}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0 \Rightarrow f(2)=\frac{2^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}\cong 0'54 \Rightarrow \underline{\underline{Máx(2,\ 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x)=0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x)\neq 0$.

$$f''(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \ ;;$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=2+\sqrt{2}} \\ \underline{x_2=2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$f'''(x)=\frac{(2x-4)\cdot e^x-(x^2-4x+2)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x}=\underline{\frac{-x^2+6x-6}{e^x}=f'''(x)}$$

$$f'''(2+\sqrt{2})\neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow f(2+\sqrt{2})=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I\,(3'41,\ 0'38)}}$$

$$f'''\left(2+\sqrt{2}\right)\neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow f\left(2+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I\,(3'41,\ 0'38)}}$$

$$f'''\left(2-\sqrt{2}\right)\neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow f\left(2-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{e^{2-\sqrt{2}}}\cong 0'24 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I\,(0'59,\ 0'24)}}$$

b)

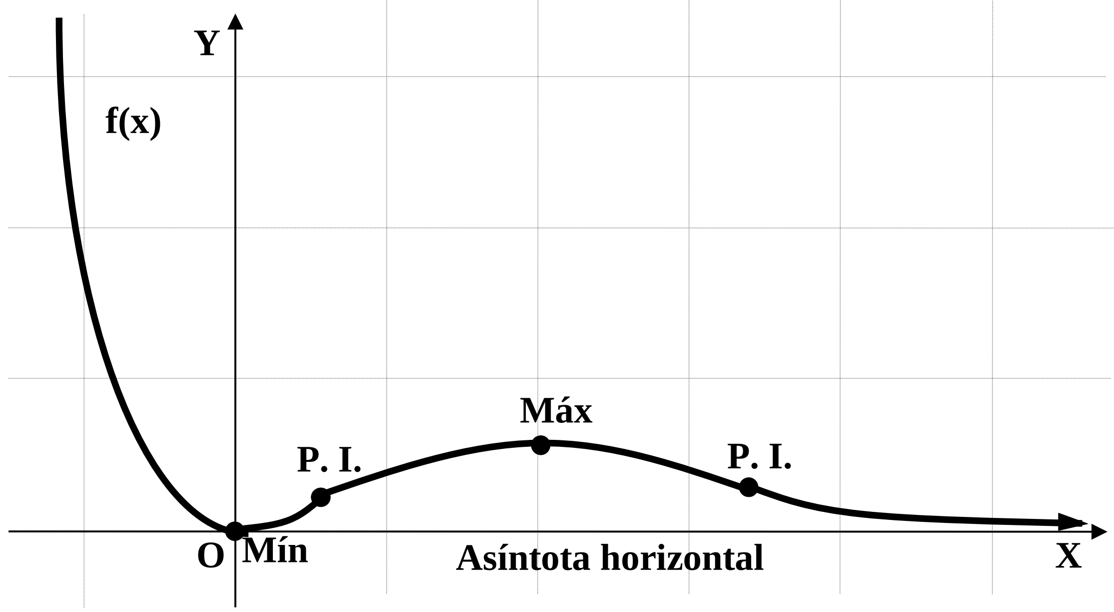
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x}=\frac{0}{e^0}=\frac{0}{1}=\underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'\,Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'\,Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

c)

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



****

4º) Hacer un dibujo de la región limitada por la curva $y = sen\ x \cdot \cos x$ y las rectas $x = 0,\ x = \frac{3\pi}{2}$ e $y = 0$. Calcular su área.

Sabiendo que $sen\ (2\alpha) = 2\, sen\ \alpha \cdot \cos\ \alpha$, la función puede expresarse de la forma $y = \frac{1}{2} sen\ (2x)$, lo cual la hace más fácil para su estudio.

Los puntos de corte con el eje de abscisas son:

$$y = \frac{1}{2} sen\ (2x) = 0 \ \Rightarrow\ sen\ (2x) = 0\ ;;\ 2x = 0 + k\pi\ ;;\ x = \frac{k\pi}{2} \ \Rightarrow\ \underline{P\left(\frac{k\pi}{2},\ 0\right),\ \forall k \in Z}$$

La función está acotada superior e inferiormente siendo $|\ f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Los máximos y mínimos (en este caso absolutos por estar la función acotada) son los siguientes:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos\ (2x) = \underline{\cos\ (2x) = y'}$$

$$y' = 0 \ \Rightarrow\ \cos\ (2x) = 0\ ;;\ \underline{2x = \frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)\ ;;\ \underline{x = \frac{\pi}{4}(1 + 2k),\ \forall k \in Z}$$

$$y'' = -2\ sen\ (2x)$$

$$Para\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \Rightarrow\ 2x \Rightarrow \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \pi,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi,\ \cdots ;;\ x \Rightarrow \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} + \pi,\ \cdots$$

$$k\ \ impar\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2},\ \cdots \left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4},\ \cdots\right) \Rightarrow (Periodo\ \ \pi)$$

$$k\ \ par\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} + \pi,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi,\ \frac{\pi}{4} + 3\pi,\ \cdots \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4},\ \cdots\right) \Rightarrow (Periodo\ \ \pi)$$

$$y''_{(k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)} \Rightarrow -sen\ \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right),\ -sen\ \left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right),\ -sen\ \left(\frac{\pi}{2} + 5\pi\right),\ \cdots \Rightarrow\ y'' > 0\ \Rightarrow \underline{Mínimos}$$

$$y''_{(k=0,\ 2,\ 4,\ \cdots)} \Rightarrow -sen\ \frac{\pi}{2},\ -sen\ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right),\ -sen\ \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right),\ \cdots \Rightarrow\ y'' < 0\ \Rightarrow \underline{Máximos}$$

$$\underline{\underline{Mínimos:\ A\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{1}{2}\right);\ B\left(\frac{7\pi}{4},\ \frac{1}{2}\right);\ C\left(\frac{11\pi}{4},\ \frac{1}{2}\right);\ \cdots}}$$

$$\underline{\underline{Máximos: P\left(\frac{\pi}{4},\ -\frac{1}{2}\right);\ Q\left(\frac{5\pi}{4},\ -\frac{1}{2}\right);\ R\left(\frac{9\pi}{4},\ -\frac{1}{2}\right);\ \cdots}}$$

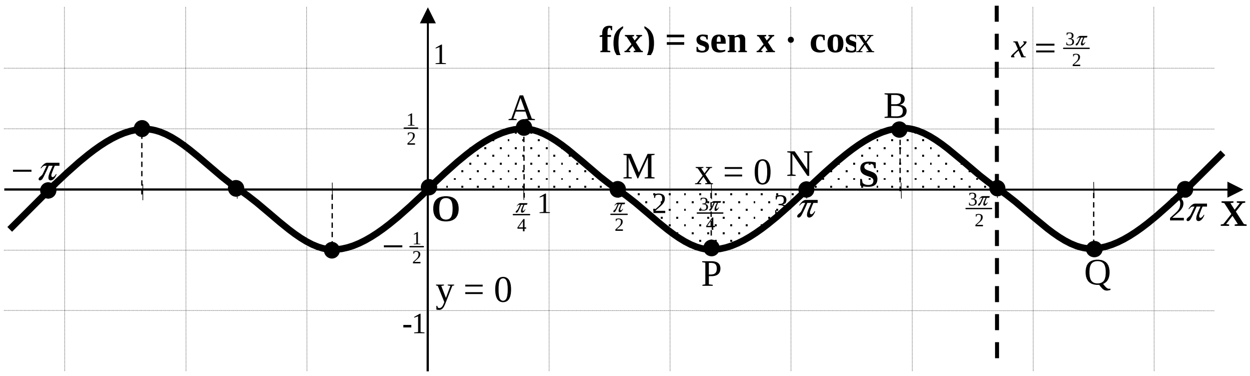
Los puntos de inflexión son para aquellos valores de x que anulan la segunda derivada.

$$y''=-2\,sen\ (2x)=0\ \Rightarrow\ sen\ (2x)=0\ ;;\ 2x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots\Rightarrow\ x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \cdots$$

$$f(0)=0\ ;;\ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0\ ;;\ f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=0\ \cdots$$

$$\underline{\underline{Puntos\ \ de\ \ Inflexión: O(0,\ 0);\ M\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ N(\pi,\ 0);\ \cdots}}$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



El área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+[F(x)]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}+[F(x)]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

$$=F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-F(0)+F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-F(\pi)+F\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-F(\pi)=\underline{2F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+F\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-F(0)-2F(\pi)=S}$$

$$F(x)=\int\frac{1}{2}\ sen\ (2x)\cdot dx=\frac{1}{2}\int sen\ (2x)\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x=t\\ dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int sen\ t\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int sen\ t\cdot dt=-\frac{1}{4}\cos\ t=\underline{-\frac{1}{4}\cos\ (2x)=F(x)}$$

Sustituyendo el valor obtenido de F(x) en la expresión de la superficie:

$$S=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos\ \pi\right)+\left[-\frac{1}{4}\cos\ (3\pi)\right]-\left(-\frac{1}{4}\cos\ 0\right)-2\left[-\frac{1}{4}\cos\ (2\pi)\right]=$$

$$S=-\frac{1}{2}\cos\pi-\frac{1}{4}\cos(3\pi)-\frac{1}{4}\cos 0+\frac{1}{2}\cos(2\pi)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{4}\cdot(-1)-\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\underline{\underline{1\ u^2=S}}$$

****