PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) A cada matriz real $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se le asocia el polinomio $P(x)=x^2-(a+d)x+|A|$, donde $|A|$ indica el determinante de A. Se dice que P(x) es el polinomio característico de la matriz A. Se pide:

a) Hallar una matriz que tenga como polinomio característico $P(x)=x^2+x+1$. ¿Cuántas matrices hay con este mismo polinomio característico?

b) Si A tiene inversa, demuestra que el polinomio característico de la matriz inversa de A, A^{-1}, es $P(x)=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$.

----

a)

Siendo el polinomio característico que nos han dado $P(x)=x^2+x+1$, en la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tiene que cumplir que: $\left.\begin{matrix} a+d=-1 \\ |A|=1 \end{matrix}\right\}$ o $\left.\begin{matrix} a+d=-1 \\ ad-bc=1 \end{matrix}\right\}$.

Como quiera que resulta un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas es compatible indeterminado, por lo tanto tiene infinitas soluciones.

Existen infinitas matrices que cumplen la condición pedida.

Un ejemplo sencillo es para los valores: $\left\{\begin{matrix} a=0 \to d=-1 \\ b=1 \to c=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b)

Si A tiene inversa, demuestra que el polinomio característico de la matriz inversa de A, A^{-1}, es $P(x) = x^2 - \frac{a+d}{|A|} x + \frac{1}{|A|}$.

Teniendo en cuenta que la inversa de la matriz A es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj.\ A^T\right)$ y que siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $\left(Adj.\ A^T\right) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & d \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-c}{|A|} \\ \frac{-b}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix}$, cuyo módulo es:

$$|A^{-1}| = \frac{d}{|A|} \cdot \frac{a}{|A|} - \frac{-c}{|A|} \cdot \frac{-b}{|A|} = \frac{1}{|A|^2} \cdot (ad - bc) = \frac{1}{|A|^2} \cdot |A| = \frac{1}{|A|}.$$

Aplicando el concepto de polinomio característico de una matriz, resulta que el polinomio característico de A^{-1} es:

$$\underline{\underline{P(x) = x^2 - \frac{a+d}{|A|} x + \frac{1}{|A|}}}, \quad \underline{\underline{c.q.d.}}$$

****

2º) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2, -1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$.

El haz de planos perpendiculares a la recta tiene como vector normal al vector director de la recta $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 1,\ 2)$.

La expresión implícita del haz de planos es $\alpha \equiv 3x + y + 2z + D = 0$ y de éstos infinitos planos, el plano π que contiene al punto P, es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 3x + y + 2z + D = 0 \\ P(2,\ -1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 1 + D = 0\ ;;\ 6 - 1 + 2 + D = 0\ ;;\ \underline{D = -7}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 3x + y + 2z - 7 = 0}$$

Para determinar el punto Q, intersección del plano π con la recta r, expresamos la recta en forma de ecuaciones paramétricas: $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x + y + 2z - 7 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3(3 + 3\lambda) + (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) - 7 = 0\ ;;$$

$$9 + 9\lambda - 1 + \lambda + 4\lambda - 7 = 0\ ;;\ 14\lambda = -1\ ;;\ \underline{\lambda = -\frac{1}{14}}\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \frac{3}{14} = \frac{39}{14} \\ y = -1 - \frac{1}{14} = -\frac{15}{14} \\ z = -\frac{2}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{Q\left(\frac{39}{14},\ -\frac{15}{14},\ -\frac{2}{14}\right)}$$

La recta s pedida es la que pasa por los puntos P y Q. Su vector director $\overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}$, siendo:

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (2,\ -1,\ 1) - \left(\frac{39}{14},\ -\frac{15}{14},\ -\frac{2}{14}\right) = \left(2 - \frac{39}{14},\ -1 + \frac{15}{14},\ 1 + \frac{2}{14}\right) =$$

$$= \left(-\frac{11}{14},\ \frac{1}{14},\ \frac{16}{14}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\overrightarrow{v_s} = (-11,\ 1,\ 16)}$$

La recta pedida expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-2}{-11} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{16}}}$$

****

3º) Se considera la función $y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$. Determina los extremos relativos y los puntos de inflexión. Haz una gráfica aproximada de la función.

$$y'(x) = \frac{2(x+1)\cdot e^x - (x+1)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{(x+1)(2-x-1)}{e^x} = \frac{(1+x)(1-x)}{e^x} = \underline{\frac{1-x^2}{e^x} = y'(x)}$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 1} \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases}$$

$$y''(x) = \frac{-2x \cdot e^x - (1-x^2)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x - 1 + x^2}{e^x} = \underline{\frac{x^2 - 2x - 1}{e^x} = y''(x)}$$

$$y''(1) = \frac{1-2-1}{e^1} = \frac{-2}{e} < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow y(1) = \frac{2^2}{e} = \frac{4}{e} \Rightarrow \underline{\underline{Máx \Rightarrow P\left(1,\ \frac{4}{e} \cong 1'47\right)}}$$

$$y''(-1) = \frac{1+2-1}{e^{-1}} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow y(-1) = \frac{0}{e^{-1}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín \Rightarrow Q(-1,\ 0)}}$$

Para que existan puntos de inflexión es condición necesaria que $y''(x) = 0$, pero no es condición suficiente, tiene que ser $y'''(x) \neq 0$.

$$y''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \ ;;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 1 + \sqrt{2}} \\ \underline{x_2 = 1 - \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$y'''(x) = \frac{(2x-2)\cdot e^x - (x^2 - 2x - 1)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - 2 - x^2 + 2x + 1}{e^x} = \underline{\frac{-x^2 + 4x - 1}{e^x} = y'''(x)}$$

Teniendo en cuenta que las raíces de $-x^2 + 4x - 1 = 0$ *son* $2 \pm \sqrt{3}$:

$$y'''(1+\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow y(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2}+1)^2}{e^{1+\sqrt{2}}} \cong \frac{11'66}{11'18} = 1'04 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I \to M\ (2'41,\ 1'04)}}$$

$$y'''(1-\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow y(1-\sqrt{2}) = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{1-\sqrt{2}}} \cong \frac{0'34}{0'66} = 0'51 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I \to N(-0'41,\ 0'51)}}$$

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que se trata de una función continua cuyo dominio es R y que:

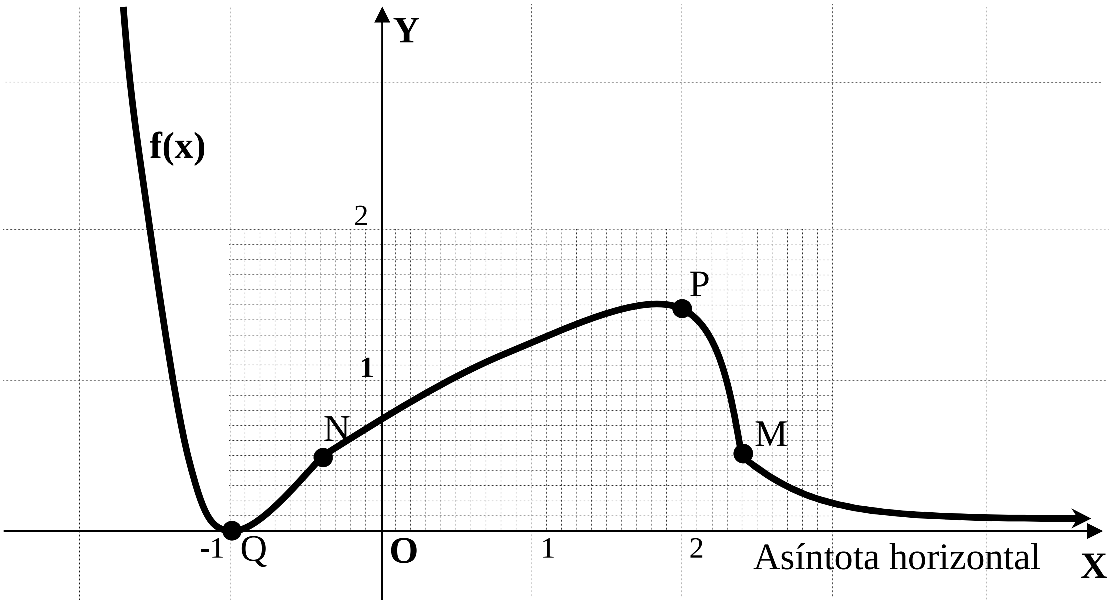
$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} \Rightarrow (L´Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2(x+1)}{e^x} \Rightarrow (L´Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{\frac{1}{e^\infty}} = \infty \cdot e^\infty = +\infty$$

La función tiene como asíntota horizontal el eje de abscisas en su parte positiva.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



****

4º) Se consideran las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = \sqrt{x+1}$. Halla la ecuación de la recta tangente a la primera curva en el punto de corte con la otra, de abscisa positiva.

El punto de corte se obtiene igualando las ecuaciones de las dos curvas:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = \sqrt{x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 1 = \sqrt{x+1} \;\;;;\;\; x^4 - 2x^2 + 1 = x + 1 \;\;;;\;\; x^4 - 2x^2 - x = 0 \;\;;;\;\; x\left(x^3 - 2x - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \;\;;;\;\; x^3 - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\,solviendo\;\; por\;\; Ruffini:$$

	1	0	-2	-1
-1		-1	1	1
	1	-1	-1	$\boxed{0}$
-1		-1	2	
	1	-2	$\boxed{\neq 0}$	

Las únicas soluciones reales son para x = 0 y x = -1; como nos indica el enunciado “de abscisa positiva”, la solución es x = 0 y el punto de tangencia es el siguiente:

$$y = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; y(0) = -1 \;\Rightarrow\; \underline{P(0,\; -1)}.$$

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$y = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; y' = 2x \;\Rightarrow\; m = y'(0) = \underline{0 = m}\,.$$

Por ser la pendiente 0, se trata de una recta horizontal cuya ecuación es de la forma y = k. Como el punto de tangencia es P(0, -1), la tangente pedida es la recta

<u>y = -1</u>

****

OPCIÓN B

1º) Discute el sistema $\begin{cases} x+ky+2z=1 \\ x+(2k-1)y+3z=1 \\ x+ky+(k+3)z=2k-1 \end{cases}$ y resuélvelo en el caso de k = 1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2k-1 & 3 \\ 1 & k & k+3 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 2k-1 & 3 & 1 \\ 1 & k & k+3 & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2k-1 & 3 \\ 1 & k & k+3 \end{vmatrix}=(2k-1)(k+3)+2k+3k-2(2k-1)-3k-k(k+3)=0 \ ;;$$

.

$$2k^2+6k-k-3+2k-4k+2-k^2-3k=0 \ ;; \ k^2-1=0 \Rightarrow \underline{k_1=1} \ ;; \ \underline{k_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} k\neq 1 \\ k\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M'=3=n^o \ incógnitas \Rightarrow Compatible \ Determinado}}$$

$$Para \ k=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \ k=1 \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M'=2<n^o \ incógnitas \Rightarrow Compatible \ Indeterminado}}$$

$$Para \ k=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \ M' \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=9-1-1+3+1-3=8\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \ k=-1 \Rightarrow Rango \ M \neq Rango \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos en el caso de k = 1, en cuyo caso el sistema es compatible determinado; el sistema resulta: $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+3z=1 \\ x+y+4z=1 \end{cases}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la última, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{x=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda+y+2z=1 \\ \lambda+y+3z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y+2z=1-\lambda \\ y+3z=1-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -y-2z=-1+\lambda \\ y+3z=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=0} \;;;\; \underline{y=1-\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z=0 \end{cases}}}$$

****

2º) Calcula los puntos de la recta $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ que están a una unidad de distancia del plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

Este ejercicio se puede resolver de diversas formas; una de ellas es la siguiente.

La expresión de la recta r por paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de la recta r tienen por expresión general: $P(-2+3\lambda,\ -\lambda,\ 2\lambda)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(\pi,\ P_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula anterior al caso que nos ocupa, resulta:

$$d(\pi,\ P) = \frac{|(-2+3\lambda)+(-\lambda)+(2\lambda)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 1 \ ;; \ \frac{|-2+3\lambda-\lambda+2\lambda|}{\sqrt{1+1+1}} = 1 \ ;; \ \frac{|4\lambda-2|}{\sqrt{3}} = 1 \ ;;$$

$$|4\lambda - 2| = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 2 = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \underline{\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}} \\ \\ -4\lambda + 2 = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \underline{\lambda_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en el punto genérico, se obtienen los puntos que cumplen la condición pedida:

$$\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 3 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{-8+6+3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}-2}{4} \\ y = -\frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ z = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(\frac{3\sqrt{3}-2}{4},\ -\frac{2+\sqrt{3}}{4},\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

$$\lambda_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 3 \cdot \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-8+6-3\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{3\sqrt{3}+2}{4} \\ y = -\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \\ z = 2 \cdot \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P_2\left(-\frac{3\sqrt{3}+2}{4}, \quad -\frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)}}$$

****

3º) La recta $y = 2x - 1$ es una asíntotas oblicua de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + k}$. Halla el valor de k y, si existen, los extremos locales de la función.

La asíntota oblicua de una función es una expresión de la forma $y = mx + n$, donde los valores de m y n son: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$.

Teniendo en cuenta lo anterior y siendo m = 2 y n = -1, sería:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - 1}{x + k}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + kx} = \underline{2 = m} \quad (como \;\; era \;\; previsible)$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2x^2 - 1}{x + k} - 2x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1 - 2x^2 - 2kx}{x + k} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2kx - 1}{x + k} = -2k = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{2}}}$$

Para que existan extremos relativos de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + \frac{1}{2}} = \frac{4x^2 - 2}{2x + 1}$ es condición necesaria que se anule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{8x \cdot (2x + 1) - (4x^2 - 1) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{16x^2 + 8x - 8x^2 + 2}{(2x + 1)^2} = \frac{8x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)^2} = \frac{2(4x^2 + x + 1)}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(4x^2 + x + 1)}{(2x + 1)^2} = 0 \;\; ;; \;\; 4x^2 + x + 1 = 0 \;\; ;; \;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{8} \Rightarrow \underline{x \notin R}$$

<u>La función dada no tiene extremos relativos</u>

****

4º) Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto.

Considerando la función $f(x) = \cos x - \sqrt{x}$, que es continua derivable en su dominio, que es $[0, +\infty)$, por lo cual le son aplicables los teoremas de Bolzano y Rolle a cualquier intervalo cerrado perteneciente al dominio de la función.

Considerando el intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ se observa que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \cos 0 - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1 > 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} - \sqrt{\frac{3\pi}{2}} = -1 - \sqrt{\frac{3\pi}{2}} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists c \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right], \ f(c) = 0}$$

Lo anterior demuestra que si $f(c) = \cos c - \sqrt{c} = 0 \Rightarrow \cos c = \sqrt{c}$, o sea, que existe un valor real $c \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ donde se cortan las curvas dadas, como se nos pedía.

Vamos a demostrar ahora, como también se nos pide, que el punto de corte es único.

Si la función f(x) tuviera al menos otra raíz real x = b, indicaría que f(b) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el Teorema de Rolle, que dice que “si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que f’(c) = 0.

$f'(x) = -sen\ x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{c} \cdot sen\ c + 1 = 0,\ \underline{c \notin R}$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la función f(x) tiene una sola raíz y, en consecuencia, <u>el punto de corte de las curvas dadas es único, c. q. d.</u>

****