

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE BALEARES****SEPTIEMBRE - 2009**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático o no matemático) utilizado por el alumno. Penalizan los errores de cálculo. Los errores graves, y especialmente, aquellos que lleven a resultados incoherentes o absurdos, serán penalizados con la aplicación del 50 % sobre la calificación en cuestión. Se valorarán todas las partes que sean correctas, aunque el resultado final no lo sea.

OPCIÓN A

1º) Demuestra que las matrices X reales, 2×2 , tales que $X \cdot X^T = I$ son precisamente las que tienen la forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ o bien $\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, con $x^2 + y^2 = 1$.

(X^T indica la matriz traspuesta de X e I indica la matriz identidad).

Siendo $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, su traspuesta es $X^T = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Siendo $x^2 + y^2 = 1$:

$$X \cdot X^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xy - xy \\ xy - xy & y^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X \cdot X^T = I \text{ (c.q.d.)}}}$$

Siendo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, su traspuesta es $X^T = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Siendo $x^2 + y^2 = 1$:

$$X \cdot X^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xy - xy \\ xy - xy & y^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X \cdot X^T = I \text{ (c.q.d.)}}}$$

2º) Estudia la posición relativa de los siguientes planos, según los valores de m :
 $\pi_1 \equiv x + y = 1$, $\pi_2 \equiv my + z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + (1 + m)y + mz = m + 1$.

Siendo M y M' las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, que determinan los tres planos, según sus rangos, pueden presentarse los seis siguientes casos:

Rango $M =$ Rango $M' = 3 \rightarrow$ S. C. D. \rightarrow Los tres planos se cortan en un punto.

Rango $M =$ Rango $M' = 2 \rightarrow$ S. C. I. \rightarrow Los tres planos se cortan en una recta.

Rango $M =$ Rango $M' = 1 \rightarrow$ S. C. I. \rightarrow Los tres planos son coincidentes.

Rango $M = 2$;; Rango $M' = 3 \rightarrow$ S. I. \rightarrow Los dos planos paralelos cortados por el 3º.

Rango $M = 1$;; Rango $M' = 3 \rightarrow$ S. I. \rightarrow Los tres planos son paralelos.

Rango $M = 1$;; Rango $M' = 2 \rightarrow$ S. I. \rightarrow Dos planos coincidentes y secantes al 3º.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango } M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - (1+m) = m^2 + 1 - 1 - m = m^2 - m = m(m-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{m_1 = 0} \text{ ;; } \underline{m_2 = 1}$$

$$\text{Para } m = 0 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2 = C_4\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2}$$

Para $m = 0$ los tres planos se cortan en una recta.

$$\text{Para } m = 1 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para $m = 1$ son dos planos paralelos y cortados por el tercero.

www.yoquieroaprobar.es

3º) Se considera la función $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$. Se pide:

a) Determinar los extremos relativos.

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.

a)

Para que una función tenga extremos relativos es necesario que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \quad ; \quad x = -\frac{1}{2}$$

Para diferenciar si se trata de un mínimo o un máximo relativo hay que recurrir a la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{1+x+x^2} - (2x+1) \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}}{1+x+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(1+x+x^2) - (2x+1)^2}{2\sqrt{1+x+x^2}(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4+4x+4x^2 - (4x^2+4x+1)}{2(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4+4x+4x^2 - 4x^2 - 4x - 1}{(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{(1+x+x^2)} = f''(x)$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para } x = -\frac{1}{2}}}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)} = \sqrt{\infty(0+0+1)} = \sqrt{\infty} = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)} = \sqrt{\infty(0-0+1)} = \sqrt{\infty} = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}} = \frac{2+0}{2\sqrt{0+0+1}} =$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}} = \frac{2-0}{2\sqrt{0-0+1}} =$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Considerando la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, que es continua y derivable en \mathbb{R} por ser suma algebraica de funciones continuas y derivables en \mathbb{R} .

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y que $\cos(-x) = \cos x$, la función $f(x)$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x) = f(x)$, como se prueba a continuación:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) \operatorname{sen}(-x) - \cos(-x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = f(x), \text{ c.q.p.}$$

Considerando que:

$$f(-\pi) = (-\pi)^2 - (-\pi) \operatorname{sen}(-\pi) - \cos(-\pi) = \pi^2 + \pi \cdot 0 - (-1) = \pi^2 + 1 > 0$$

$$f(0) = 0^2 - 0 \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = 0 - \pi \cdot 0 \cdot 0 - 1 = -1 < 0.$$

Según el Teorema de Bolzano, en el intervalo $(-\pi, 0)$ la función $f(x)$ tiene, al menos, una raíz $x = a$, siendo $-\pi < a < 0$ y tal que $f(a) = 0$.

Vamos a demostrar ahora que la raíz es única.

Si la función tuviera al menos otra raíz real positiva en el intervalo considerado, $x = b$, indicaría que $f(b) = 0$, con lo cual se podría aplicar a la función $f(x)$ el Teorema de Rolle, teniendo en cuenta lo expresado en el primer párrafo.

Siendo $b > a$, tendría que existir un valor positivo c , tal que $a < c < b$, para el cual se anularía la derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como vamos a demostrar a continuación es imposible:

$$f'(x) = 2x - (1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x) + \operatorname{sen} x = 2x - \operatorname{sen} x - x \cos x + \operatorname{sen} x = 2x - x \cos x =$$

$$= x(2 - \cos x) \Rightarrow f'(c) = c(2 - \cos c) \Rightarrow 2 - \cos c \neq 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow c \notin (-\pi, 0)$$

$f'(c) \neq 0, \forall c \in (-\pi, 0)$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la función tiene una sola raíz en el intervalo $(-\pi, 0)$ y, teniendo en cuenta la simetría de la función:

La ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene, exactamente, dos raíces en $[-\pi, \pi]$. (c.q.d.)

OPCIÓN B

1º) Determinar el rango de la matriz real $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$, según los valores de α . Re-

solver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el caso de $\alpha = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 = 4a + 4 + 2a - 4 - a^3 - a^2 =$$

$$= -a^3 - a^2 + 6a = 0 \quad ; \quad -a(a^2 + a - 6) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \quad ; \quad a^2 + a - 6 = 0 \quad ; \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \underline{a_2 = -3} \quad ; \quad \underline{a_3 = 2}$$

$$\text{Para } a=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

$$\text{Para } a=-3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

$$\text{Para } a=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } \begin{cases} a \neq -3 \\ a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3 \quad ; \quad \text{Para } \begin{cases} a = -3 \\ a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 2}}$$

$$\text{Para } \alpha = 0 \text{ el sistema resulta: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Siendo $\text{Rango } A = 2$ el sistema homogéneo, además de la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones; se obtienen despreciando una ecua-

ción, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $z = \lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = -\lambda \\ x + 2y = -\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -x - y = \lambda \\ x + 2y = -\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{y=0} \ ; \ ; \ \underline{x=-\lambda}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sea r la intersección de los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv ax + by + cz + d = 0 \\ \pi_2 \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$. Se considera la familia de planos de la forma $\beta \equiv ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Demostrar que la recta r está contenida en todos los planos de la familia β .

b) Calcular el plano de la familia $\gamma \equiv 2x - y + z + 1 + k(x + y + z - 2) = 0$ que se encuentre a una unidad de distancia del origen de coordenadas.

a)

La expresión de r por dos ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$.

La familia de planos $\beta \equiv ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$ constituyen el haz de los infinitos planos que tienen en común, precisamente, a la recta r , de donde se deduce, por definición, lo pedido:

$\forall k \in \mathbb{R}$ la recta r está contenida en la familia de planos β

b)

La familia de planos $\gamma \equiv 2x - y + z + 1 + k(x + y + z - 2) = 0$ puede expresarse de la forma $\gamma \equiv (2+k)x + (k-1)y + (1+k)z + (1-2k) = 0$.

La distancia del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas viene dada por la fórmula $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al caso que nos ocupa es:

$$d(O, \pi) = \frac{|1-2k|}{\sqrt{(2+k)^2 + (k-1)^2 + (1+k)^2}} = 1 \quad ; \quad (1-2k)^2 = (2+k)^2 + (k-1)^2 + (1+k)^2 \quad ; ;$$

$$1 - 4k + 4k^2 = 4 + 4k + k^2 + k^2 - 2k + 1 + 1 + 2k + k^2 \quad ; \quad -4k + k^2 = 5 + 4k \quad ; \quad k^2 - 8k - 5 = 0.$$

$$k = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 20}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 4 \pm \sqrt{21} \Rightarrow \underline{k_1 = 4 - \sqrt{21}} \quad ; \quad \underline{k_2 = 4 + \sqrt{21}}.$$

Los planos que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\underline{\gamma_1 \equiv 2x - y + z + 1 + (4 - \sqrt{21})(x + y + z - 2) = 0}} \quad \text{y} \quad \underline{\underline{\gamma_2 \equiv 2x - y + z + 1 + (4 + \sqrt{21})(x + y + z - 2) = 0}}$$

3º) Calcular los puntos de la curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en los cuales la pendiente de la recta tangente es 1.

La pendiente de la recta es $m = 1$.

La curva puede expresarse de la forma: $x^2 + 2y^2 = 4$;; $y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 ;; \frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 ;; -x = 2\sqrt{4-x^2} ;; x^2 = 4(4-x^2) = 16 - 4x^2 ;; 5x^2 = 16 ;;$$

$$x^2 = \frac{16}{5} ;; x = \pm \sqrt{\frac{16}{5}} = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \underline{x_1 = -\frac{4\sqrt{5}}{5}} ;; \underline{x_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}}.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x^2 = \frac{16}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{16}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 ;; \frac{4}{5} + \frac{y^2}{2} = 1 ;; \frac{y^2}{2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} ;; y^2 = \frac{2}{5} ;; y = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \underline{y_1 = -\frac{\sqrt{10}}{5}} ;; \underline{y_2 = \frac{\sqrt{10}}{5}}.$$

Teniendo en cuenta que la curva es una parábola simétrica con respecto a los ejes y al origen, los puntos de tangencia pertenecen a los cuadrantes segundo y cuarto; los puntos de tangencia son:

$$\underline{\underline{P\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \text{ y } Q\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)}}$$

4º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ xLx & \text{si } x>0 \end{cases}$ ($Lx = \log_e x$), se pide:

a) Estudiar la continuidad.

b) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = k$, $x = 1$, donde k es la abscisa del mínimo de la función. Hacer un dibujo de la región.

a)

La función es continua en su dominio, que es $[0, +\infty)$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad por la derecha es dudosa; se estudia a continuación.

Para que la función sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ sea igual al valor de la función en ese punto, o sea: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (xLx) = 0 \cdot (-\infty) \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \Rightarrow \underline{f(x) \text{ es continua por la derecha en } x=0} \end{aligned}$$

La función es continua en su dominio.

b)

Los puntos de corte de la función con el eje X son los siguientes:

$$x \cdot Lx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x=1 \rightarrow \underline{A(1, 0)} \end{cases}$$

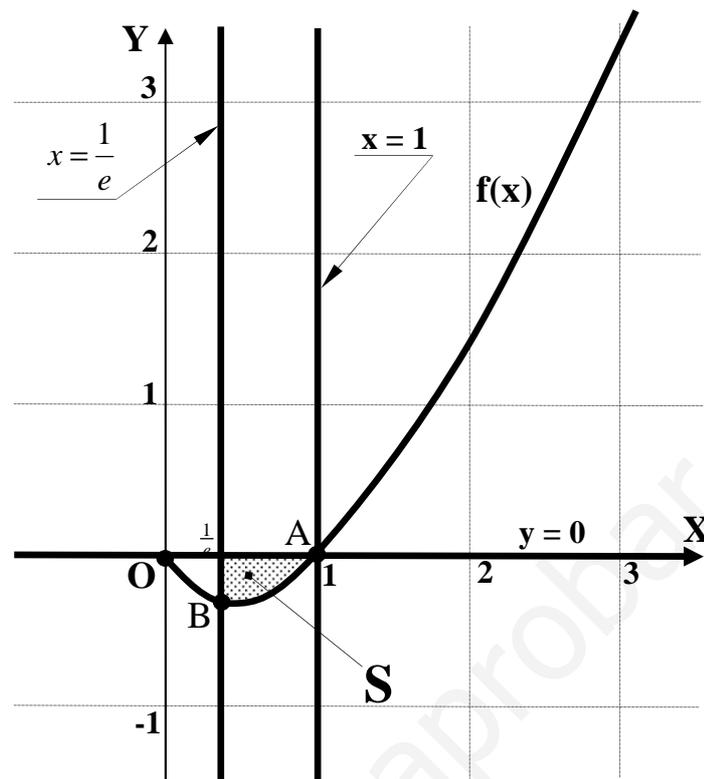
Vamos a determinar ahora el mínimo de la función, para lo cual consideremos la función $f(x) = x \cdot Lx$.

$$f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = Lx + 1 \quad ; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow Lx + 1 = 0 \quad ; ; \quad Lx = -1 \quad ; ; \quad \underline{x = e^{-1}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad ; ; \quad f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}}$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot L e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow \underline{\text{Mín}} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función es convexa (\cup) en su dominio, por ser la segunda derivada positiva para cualquier valor real de x perteneciente al dominio, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Como todas las ordenadas de la superficie que vamos a calcular son negativas, cambiamos los límites de integración:

$$A = \int_1^{\frac{1}{e}} x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = du \\ x dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_1^{\frac{1}{e}} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx \right]_1^{\frac{1}{e}} = \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^{\frac{1}{e}} = \left[\frac{x^2}{4} (2Lx - 1) \right]_1^{\frac{1}{e}} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2}{4} (2L\frac{1}{e} - 1) \right] - \left[\frac{1^2}{4} (2L1 - 1) \right] = \left[\frac{1}{4e^2} (-2 - 1) \right] - \left[\frac{1}{4} \cdot (0 - 1) \right] = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4e^2} \cong$$

$$\cong \frac{7'39 - 3}{29'56} = \frac{4'39}{29'56} = \underline{\underline{0'15 u^2 = S}}$$
