PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) Determine, según los valores de m, el rango de la matriz real $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En el caso de m = 1, calcule las soluciones del sistema homogéneo $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}=2(m-1)(m-2)+m+m(m-2)=2(m^2-3m+2)+m+m^2-2m=$$

$$=2m^2-6m+4-m+m^2=3m^2-7m+4=0\ ;;\ m=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6}=$$

$$=\frac{7\pm 1}{6}\Rightarrow \underline{m_1=1}\ ;;\ \underline{m_2=\frac{4}{3}}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} m\neq 1 \\ m\neq \frac{4}{3} \end{matrix}\right\}\Rightarrow Rango\ de\ A=3}}$$

$$Para\ m=1\ es\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow \{F_2=-F_1\}\Rightarrow \underline{Rango\ de\ A=2}.$$

$$Para\ \ m=\frac{4}{3}\ \ es\ \ A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ A=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \left.\begin{cases} m=1 \\ m=\frac{4}{3} \end{cases}\right\} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ A=2}}$$

$Para\ \ m=1\ \ es\ \ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente a la expresión $\left.\begin{array}{r} y-z=0 \\ -y+z=0 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$. Como se aprecia, las dos primeras ecuaciones son iguales, por lo que el sistema resulta, finalmente, de la forma más simplificada $\left.\begin{array}{r} y-z=0 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$.

Haciendo $z=\lambda$ resultan: $x=-2\lambda$ e $y=\lambda$.

$$\underline{\underline{Solución:\ \left.\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Calcule el valor de k para el cual las rectas $r \equiv \frac{x-1}{k}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{k}$ y $s \equiv \frac{x+1}{2k}=\frac{y}{k+3}=\frac{z-2}{2}$ sean paralelas. Calcule, en ese caso, la distancia entre las rectas.

Los vectores directores de las rectas $r \equiv \frac{x-1}{k}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{k}$ y $s \equiv \frac{x+1}{2k}=\frac{y}{k+3}=\frac{z-2}{2}$ son $\overrightarrow{u}=(k,\ 2,\ k)$ y $\overrightarrow{v}=(2k,\ k+3,\ 2)$, respectivamente.

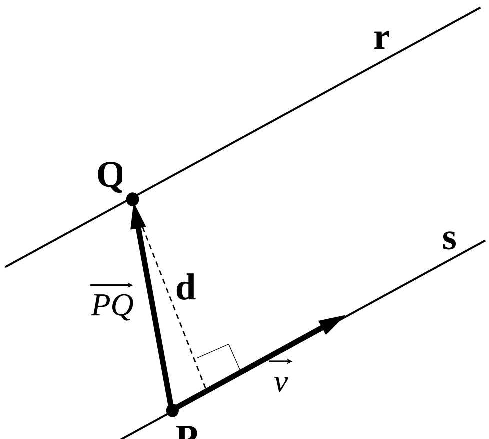
Para que las rectas r y s sean paralelas, los vectores $\overrightarrow{u}=(k,\ 2,\ k)$ y $\overrightarrow{v}=(2k,\ k+3,\ 2)$ tienen que ser paralelos, o sea, linealmente dependientes, por lo cual sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{k}{2k}=\frac{2}{k+3}=\frac{k}{2}\ ;;\ \frac{1}{2}=\frac{2}{k+3}=\frac{k}{2}\ \Rightarrow\ \underline{k=1}.$$

<u>Para que las rectas r y s sean paralelas tiene que ser k = 1.</u>

Para k = 1 las rectas son $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{1}$ y $s \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{2}$.

La distancia entre dos rectas paralelas es la misma que la distancia de un punto de una de las rectas a la otra; por ejemplo, la distancia entre r y s el la misma que la distancia de un punto de r a s.



La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(Q,\ s)=\frac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, donde $\overrightarrow{PQ}$ es un vector de origen un punto de s y extremo un punto de r, siendo $\overrightarrow{v}$ un vector director de las rectas, que es el mismo por ser paralelas,

Un punto de r es Q(1, 0, -3) y un punto de s es P(-1, 0, 2).

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,\ 0,\ -3)-(-1,\ 0,\ 2)=(2,\ 0,\ -5) \text{ y } \overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ 1).$$

$$d(r,\ s)=d(Q,\ s)=\frac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{|-10i+2j-4k+5j|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|-10i+7j-4k|}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(-10)^2+7^2+(-4)^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{100+49+16}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{165}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{165}{6}}=\sqrt{\frac{55}{2}}=\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{2}}=\underline{\frac{\sqrt{110}}{2}=d(r,\ s)}$$

$$\underline{\underline{La\ \ dis\tan cia\ \ entre\ \ r\ \ y\ \ s\ \ es\ \ d(r,\ s)=\frac{\sqrt{110}}{2}\ \ unidades}}$$

****

3º) Calcule el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el cual la pendiente de la recta tangente sea máxima. Haga un dibujo donde aparezcan la curva, el punto y la recta tangente.

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$m = y' = \frac{0 - 1 \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} .$$

La pendiente es máxima cuando su derivada sea cero:

$$m' = y'' = \frac{-2 \cdot \left(1+x^2\right)^2 - (-2x) \cdot 2 \cdot \left(1+x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2 \cdot \left(1+x^2\right) + 8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{6x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$m' = 0 \Rightarrow \frac{6x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^3} = 0 \;;;\; 6x^2 - 2 = 0 \;;;\; 3x^2 - 1 = 0 \;;;\; x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \;;;\; \underline{x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}} .$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente, ya que para que sea un máximo tiene que ser negativa la segunda derivada de la pendiente:

$$m'' = \frac{12x \cdot \left(1+x^2\right)^3 - \left(6x^2 - 2\right) \cdot 3 \cdot \left(1+x^2\right)^2 \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^6} = \frac{12x \cdot \left(1+x^2\right) - 6x \cdot \left(6x^2 - 2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{24x - 24x^3}{\left(1+x^2\right)^4} = \underline{\frac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}} = m''$$

$$m''\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{24 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^4} = \frac{-\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4} = -\frac{8 \cdot 2 \cdot 3^4}{4^4 \cdot \sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \underline{\mathit{Máximo\ \ para\ \ } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}} .$$

$$m''\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{24 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^4} = \frac{\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3^4}{4^4 \cdot \sqrt{3}} > 0 \Rightarrow \underline{\mathit{Mínimo\ \ para\ \ } x = \frac{1}{\sqrt{3}}} .$$

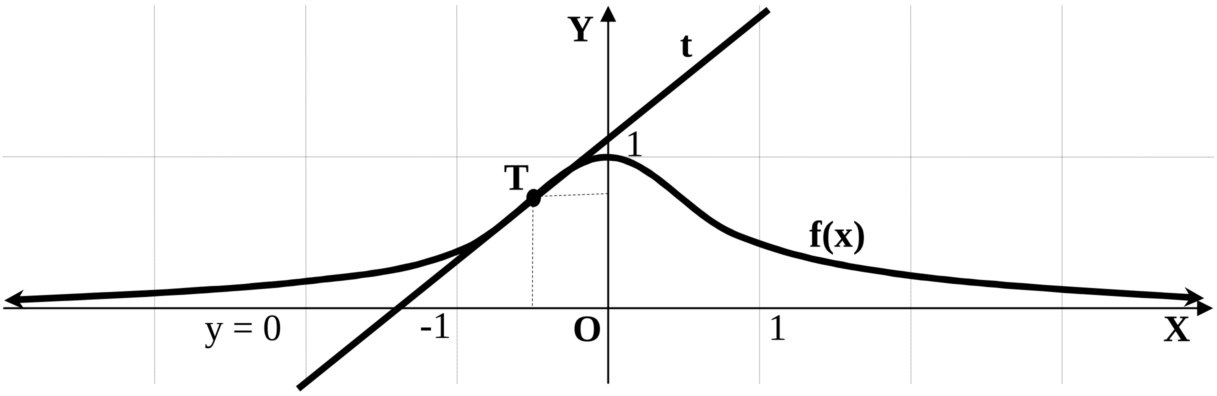
El punto de tangencia es el siguiente:

$$y\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{T\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \left(-0'58,\ 0'75\right)}}.$$

La función es par, por lo tanto es simétrica con respecto al eje de ordenadas; además se cumple que $y = \dfrac{1}{1+x^2} > 0,\ \forall x \in R$.

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, el eje de abscisas es asíntota horizontal de la función.

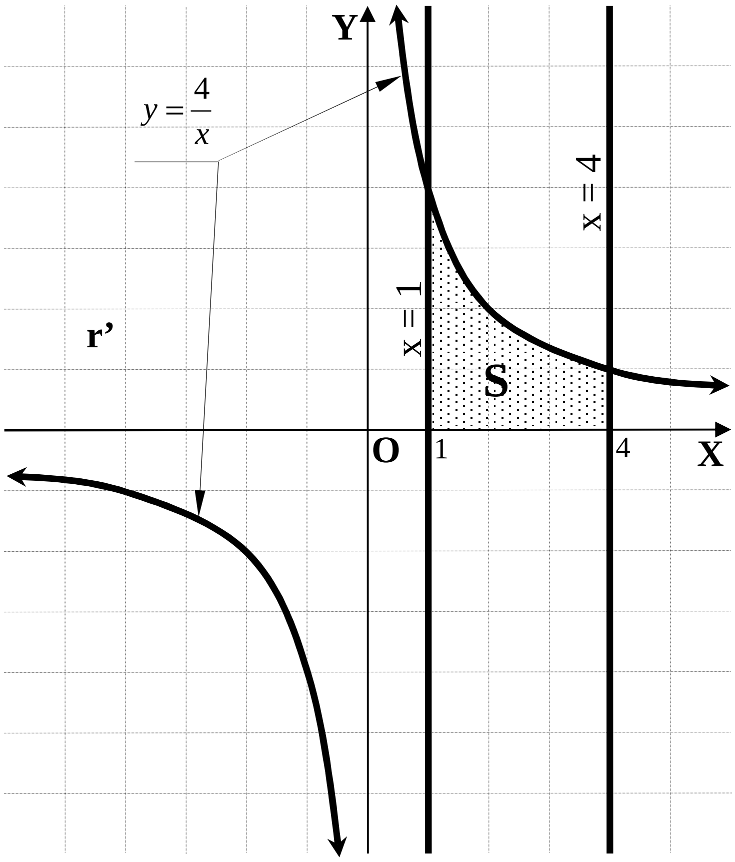
Considerando que el punto A(0, 1) es un punto de la curva y todo lo anterior se puede hacer un dibujo aproximado de la situación, que es el indicado en la figura.



****

4º) Calcule el área de la región limitado por la hipérbola $x \cdot y = 4$ y la recta que la corta en los puntos de abscisas x = 1 y x = 4. Haga un dibujo de la región.

La representación gráfica de la situación, aproximadamente, es la que se indica en la figura.



La expresión de la hipérbola $x \cdot y = 4$ puede ser también $y = \frac{4}{x}$.

$$S = \int_1^4 \frac{4}{x} \cdot dx = [4\,L\,x]_1^4 = 4L4 - 4L1 = 4L4 - 4 \cdot 0 = 4L2^2 = \underline{\underline{8L2\,u^2 \cong 5'55\,u^2 = S}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Calcule la matriz X que verifica: $X \cdot A+I=B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

$X \cdot A+I=B$;; $X \cdot A=B-I \Rightarrow$ Multiplicando por la derecha por $A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1}=(B-I) \cdot A^{-1}$;; $X \cdot I=(B-I) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X=(B-I) \cdot A^{-1}}$ (*)

$$B-I=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=B-I}.$$

Para hallar la inversa de la matriz A vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2 \to F_2-2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_2 \to \frac{1}{3}F_2\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1 \to F_1+F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3 \to F_3-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo los valores hallados de (B – I) y A^{-1} en la expresión (*):

$$X=(B-I)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-0+0 & -\frac{1}{3}+0+0 & 1+0+1\\ 0-0+0 & 0+0+0 & -0+0+1\\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+0 & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0 & -1+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}}}$$

****

2º) Sean $P(a_1,\ b_1,\ c_1)$ y $Q(a_2,\ b_2,\ c_2)$ dos puntos del plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$. Demuestre que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{n}=(A,\ B,\ C)$. Aplíquelo para calcular la ecuación general del plano α que contiene a los puntos P(1, 2, 3), Q(-1, 0, 2) y R(1, 1, 1).

Los puntos $P(a_1,\ b_1,\ c_1)$ y $Q(a_2,\ b_2,\ c_2)$, por pertenecer al plano π, tienen que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ P(a_1,\ b_1,\ c_1)\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0} \quad (1).$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ Q(a_2,\ b_2,\ c_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=0} \quad (2).$$

Restando a la ecuación (2) la ecuación (1), queda:

$$(Aa_2+Bb_2+Cc_2+D)-(Aa_1+Bb_1+Cc_1+D)=0\ ;;\ \underline{(a_2-a_1)A+(b_2-b_1)B+(c_2-c_1)C=0} \quad (3)$$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es el siguiente:

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(a_2,\ b_2,\ c_2)-(a_1,\ b_1,\ c_1)=\underline{(a_2-a_1,\ b_2-b_1,\ c_2-c_1)=\overrightarrow{PQ}}.$$

Si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{n}=(A,\ B,\ C)$ son perpendiculares, su producto escalar tiene que ser cero:

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Rightarrow (a_2-a_1,\ b_2-b_1,\ c_2-c_1)\cdot(A,\ B,\ C)=(a_2-a_1)A+(b_2-b_1)B+(c_2-c_1)C$, que es igual a cero, como se comprueba en la expresión (3).

$$\underline{\underline{\overrightarrow{PQ}\ y\ \overrightarrow{n}\ son\ perpendiculares,\ como\ quer\acute{\imath}amos\ demostrar.}}$$

Los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$ son perpendiculares al vector normal del plano α, por lo cual, su producto vectorial es linealmente dependiente al vector normal del plano.

$$\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,\ 2,\ 3)-(-1,\ 0,\ 2)=(2,\ 2,\ 1).$$

$$\overrightarrow{QR}=R-Q=(1,\ 1,\ 1)-(-1,\ 0,\ 2)=(2,\ 1,\ -1).$$

$$\overrightarrow{n'}=\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} ?-2i+2j+3k-4k-i+2j=-3i+4j-2k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n}=(3,\ -4,\ 2)}.$$

El plano α tiene por expresión general $\alpha \equiv 3x - 4y + 2z + D = 0$.

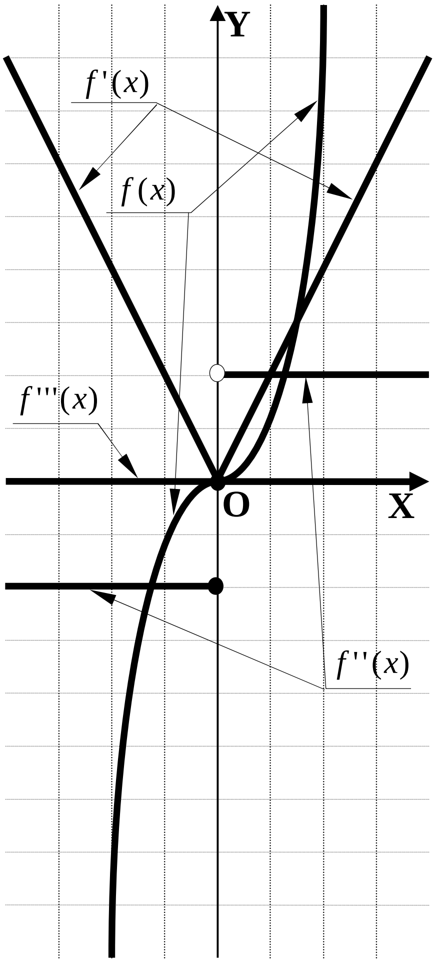
Para hallar el valor del término independiente D tomamos uno cualquiera de los puntos, por ejemplo R(1, 1, 1), que tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 3x - 4y + 2z + D = 0 \\ R(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + D = 0 \ ;;\ 3 - 4 + 2 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1}.$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv 3x - 4y + 2z - 1 = 0}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x) = x \cdot |x|$. Calcule las ecuaciones y el dominio de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$. Represéntelas gráficamente.



La función f(x), que es continua en R, puede redefinirse de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x \cdot x = -x^2 & si \;\; x \le 0 \\ x \cdot x = x^2 & si \;\; x > 0 \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x \le 0 \\ 2x & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & si \;\; x \le 0 \\ 2 & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

$$f'''(x) = 0$$

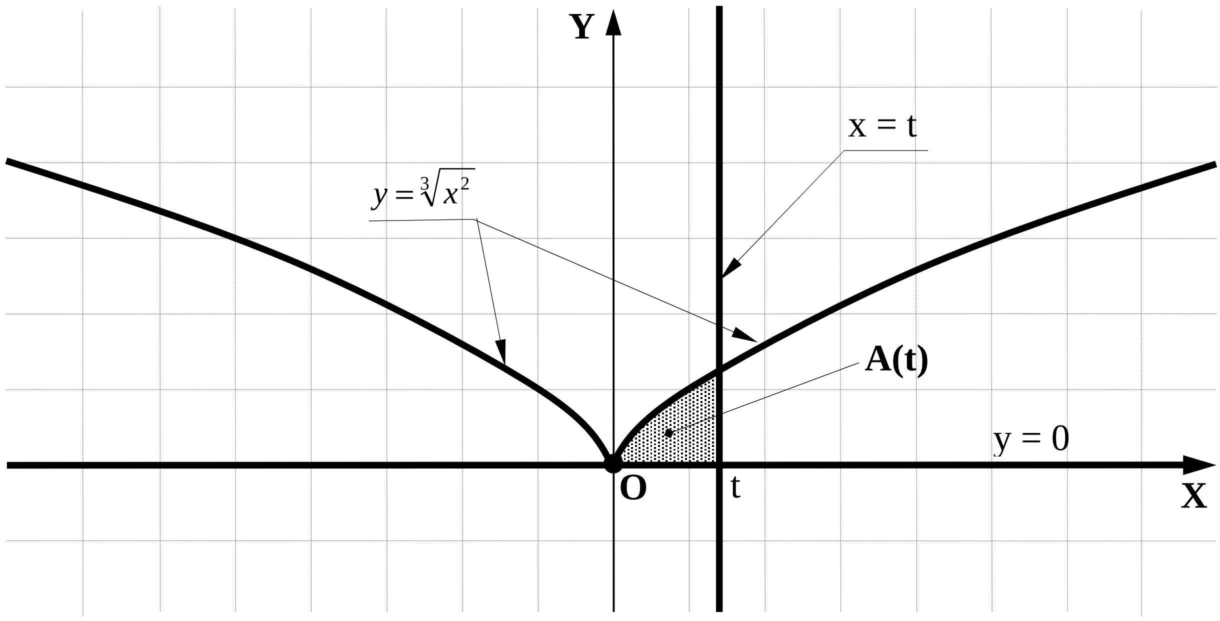
La representación gráfica, aproximada, de las funciones son las que aparecen en la figura adjunta.

De la observación de la gráfica se observa que el dominio de todas las funciones es el mismo: el conjunto de los número reales.

****

4º) Sea A(t), t > 0, el área de la región limitado por la curva $y=\sqrt[3]{x^2}$ y las rectas y = 0 y x = t. Representa gráficamente ésta región y calcule el valor de t para que A(t) = 1.

La representación gráfica de la solución es la que indica la figura.



$$A=\int_0^t \sqrt[3]{x^2}\cdot dt=\int_0^t x^{\frac{2}{3}}\cdot dt=\left[\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_0^t=\left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^t=\left[\frac{3\cdot x^{\frac{5}{3}}}{5}\right]_0^t=\frac{3\cdot t^{\frac{5}{3}}}{5}-0=1\ ;;\ t^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}\ ;;\ t^5=\frac{125}{27}\ .$$

$\underline{\underline{t=\sqrt[5]{\frac{125}{27}}}}$, o de forma aproximada: $\underline{\underline{t = 1'36}}$.

****