

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE BALEARES****JUNIO – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

**OPCIÓN A**

1º) a) Comprobar que si  $A$  es una matriz cuadrada tal que  $A^2 = 2A - I$ , siendo  $I$  la matriz identidad, entonces  $A$  es inversible. ¿Cuál es la expresión de  $A^{-1}$ ?

b) Utilizar el apartado a) para calcular la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

a)

$$A^2 = 2A - I \quad ; \quad A^2 - 2A = -I \quad ; \quad 2A - A^2 = I \quad ; \quad A \cdot (2I - A) = I.$$

Teniendo en cuenta que, por definición de inversa de una matriz, se cumple que:

$A \cdot A^{-1} = I$ , de la última expresión se deduce que  $\underline{A^{-1} = 2I - A}$ , que existe para cualquier matriz  $A$  de coeficientes reales.

Nota: Falsa sería la demostración siguiente:

$$A^2 = 2A - I \quad ; \quad A \cdot A = 2A - I \Rightarrow \text{Multiplicando por la izquierda por } A^{-1}:$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1} \cdot (2A - I) \quad ; \quad I \cdot A = 2A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot I \quad ; \quad A = 2I - A^{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = 2I - A}.$$

Aunque se llega a una solución idéntica, se supone de antemano la existencia de la matriz inversa.

b)

En primer lugar hay que comprobar que  $A^2 = 2A - I$ :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

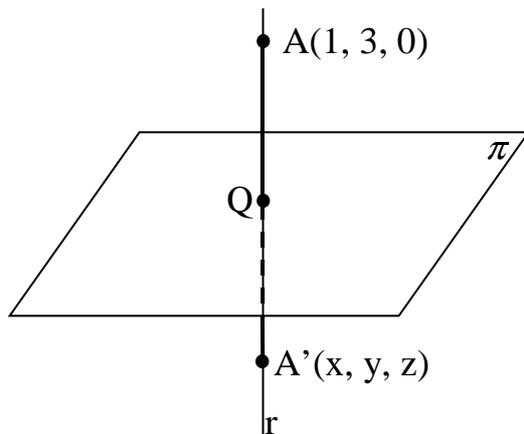
$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

En efecto,  $A^2 = 2A - I$ , por lo cual será  $A^{-1} = A - I$ :

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

\*\*\*\*\*

2º) Dados el punto  $A(1, 3, 0)$  y el plano  $\pi \equiv x+2y+z-1=0$ , determinar las coordenadas del punto  $A'$  simétrico de  $A$  con respecto al plano  $\pi$ . Calcular la distancia de  $A'$  al plano  $\pi$ .



Un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, 2, 1)$ .

La recta  $r$  es la que pasa por el punto  $P$  y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director es el vector normal del plano  $\pi$ ; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

El punto  $Q$ , intersección del plano  $\pi$  con la recta  $r$ , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x+2y+z-1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1+\lambda)+2(3+2\lambda)+\lambda-1=0 \;; \; 1+\lambda+6+4\lambda+\lambda-1=0 \;; \; 6\lambda+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda+1=0 \;; \; \lambda=-1 \Rightarrow \underline{Q(0, 1, -1)}.$$

Para que  $A'$  sea el punto simétrico de  $A$  con respecto a  $\pi$ , tiene que cumplirse que:

$$\vec{AQ} = \vec{QA'} \Rightarrow Q - A = A' - Q \;; \; (0, 1, -1) - (1, 3, 0) = (x, y, z) - (0, 1, -1) \;;$$

$$(-1, -2, -1) = (x, y-1, z+1) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y-1=-2 \rightarrow y=-1 \\ z+1=-1 \rightarrow z=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{A'(-1, -1, -2)}.$$

La distancia del punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al plano genérico  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  viene dada por la fórmula:  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Aplicando la fórmula al plano  $\pi \equiv x+2y+z-1=0$  y al punto  $A'(-1, -1, -2)$ :

$$d(A', \pi) = \frac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-1 - 2 - 3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\sqrt{6} \text{ unid.} = d(A', \pi)}}.$$

\*\*\*\*\*

3º) Considera la función real definida en toda la recta real por  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$ .

a) Calcular  $f'(x)$  y  $f''(x)$  dando los resultados completamente simplificados.

b) Determinar los máximos y mínimos de la función  $f(x)$ .

-----

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x \cdot (x^2 + 1)^2 - (3x^2 - 1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{6x \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{6x^3 + 6x - 12x^3 + 4x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-6x^3 + 10x}{(x^2 + 1)^3} = \underline{\underline{\frac{-2x(3x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^3} = f'(x)}}. \\ f''(x) &= \frac{(-18x^2 + 10) \cdot (x^2 + 1)^3 + 2x(3x^2 - 5) \cdot 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^6} = \\ &= \frac{(-18x^2 + 10) \cdot (x^2 + 1) + 12x^2(3x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-18x^4 - 18x^2 + 10x^2 + 10 + 36x^4 - 60x^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{18x^4 - 68x^2 + 10}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \underline{\underline{\frac{2(9x^4 - 34x^2 + 5)}{(x^2 + 1)^4} = f''(x)}}. \end{aligned}$$

b)

Una función tiene un extremo relativo para los valores de  $x$  que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x(3x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \quad ; ; \quad -2x(3x^2 - 5) = 0 \quad ; ; \quad x_1 = 0 \quad ; ; \quad 3x^2 - 5 = 0 \quad ; ; \quad 3x^2 = 5 \quad ; ;$$

$$x^2 = \frac{5}{3} \quad ; ; \quad x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = +\frac{\sqrt{15}}{3}}} \quad ; ; \quad \underline{\underline{x_3 = -\frac{\sqrt{15}}{3}}}.$$

Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si el valor es positivo para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativo se trata de un máximo.

$$f''(0) = \frac{2(0 - 0 + 5)}{(0 + 1)^4} = \frac{10}{1} = 10 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para } x = 0}}.$$

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 1}{(0^2 + 1)^2} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } A(0, -1)}}.$$

Teniendo en cuenta que  $f(x)$  es una función par, por ser  $f(-x) = f(x)$ , es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

$$f''\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{2 \cdot \left[ 9 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^4 - 34 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + 5 \right]}{\left[ \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + 1 \right]^4} = \frac{2 \cdot \left( 9 \cdot \frac{25}{9} - 34 \cdot \frac{5}{3} + 5 \right)}{\left(\frac{5}{3} + 1\right)^4} = \frac{2 \cdot \left( 25 - \frac{170}{3} + 5 \right)}{(+)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left( 30 - \frac{170}{3} \right)}{(+)} = \frac{2 \cdot \left( \frac{90 - 170}{3} \right)}{(+)} = \frac{2 \cdot \frac{-80}{3}}{(+)} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximos para } x = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}}}.$$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{3 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 - 1}{\left[ \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + 1 \right]^2} = \frac{3 \cdot \frac{5}{3} - 1}{\left(\frac{5}{3} + 1\right)^2} = \frac{5 - 1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4}{\frac{64}{9}} = \frac{4 \cdot 9}{64} = \frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\text{Máximos relativos: } B\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{9}{16}\right) \text{ y } C\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{9}{16}\right)}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Dada la función  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ ,

a) Calcular F(x) tal que  $F'(x) = f(x)$  para cualquier valor de x.

b) Calcular la integral  $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} \cdot dx$ .

-----

a)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^4+1=t \\ x^3 dt = \frac{1}{4} dt \end{array} \right\} \Rightarrow F(t) = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \sqrt{t} + C \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^4+1} + C}}$$

b)

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{x^4+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{1^4+1} - \frac{1}{2} \sqrt{0^4+1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) = I}}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) a) Sin desarrollar el determinante, comprobar que  $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$ .

b) Determinar el rango del siguiente conjunto de vectores:

$$\{\vec{u} = (1, -2, 0, -3), \vec{v} = (-1, 3, 1, 4), \vec{w} = (2, 1, 5, -1)\}.$$

a)

Se van a utilizar las siguientes propiedades:

- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

- Si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x+2 \\ x & x & x+4 \\ x & x & x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1+1 \\ x & 3 & 3+1 \\ x & 5 & 5+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 3 \\ x & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

b)

El rango del conjunto de vectores dado es igual que el rango de la matriz que determinan:

$$\text{Rango} \{\vec{u} = (1, -2, 0, -3), \vec{v} = (-1, 3, 1, 4), \vec{w} = (2, 1, 5, -1)\} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz anterior es, por dimensión,  $< 4$  y  $\geq 2$  por ser  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Vamos a ver si tiene rango 3, para lo cual es necesario que todos los determinantes de orden 3 que pueden formarse sean distintos de cero.

$$\left. \begin{aligned} \{C_1, C_2, C_3\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 - 1 - 10 = 15 - 15 = 0 \\ \{C_1, C_2, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 3 - 16 + 18 - 4 + 2 = 23 - 23 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 45 + 3 + 40 = 45 - 45 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rango} = 2}.$$

$$\underline{\underline{\text{Rango} \{ \vec{u} = (1, -2, 0, -3), \vec{v} = (-1, 3, 1, 4), \vec{w} = (2, 1, 5, -1) \} = 2}}$$

Otra forma diferente de calcular el rango de los vectores es determinando si son o no linealmente independientes.

Es evidente que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son linealmente independientes, por lo cual el rango del conjunto es mayor e igual que 2.

Si los vectores  $\{ \vec{u} = (1, -2, 0, -3), \vec{v} = (-1, 3, 1, 4), \vec{w} = (2, 1, 5, -1) \}$  son linealmente dependientes tiene que cumplirse que  $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$ , siendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$(1, -2, 0, -3) = \alpha \cdot (-1, 3, 1, 4) + \beta \cdot (2, 1, 5, -1) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 5\beta = 0 \\ 4\alpha - \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow 7\beta = 1 \quad ; \quad \underline{\underline{\beta = \frac{1}{7}}} ; ;$$

$$\underline{\underline{\alpha = -5\beta = -\frac{5}{7} = \alpha}} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u} = -\frac{5}{7}\vec{v} + \frac{1}{7}\vec{w}}}$$

Los vectores  $\{ \vec{u} = (1, -2, 0, -3), \vec{v} = (-1, 3, 1, 4), \vec{w} = (2, 1, 5, -1) \}$  son linealmente dependientes y su rango es 2, como esperábamos.

\*\*\*\*\*

2º) Determinar la ecuación del plano  $\pi$  que pasa por los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 2, 0) y corta al eje OZ en el punto C(0, 0, c) con  $c > 0$  tal que el área del triángulo ABC vale  $\sqrt{6}$  unidades cuadradas.

-----

Los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, c) determinan los vectores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  y  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , que son los siguientes:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, c) - (1, 0, 0) = (-1, 0, c).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |2ci + 2k + cj| = \frac{1}{2} \cdot |2ci + cj + 2k| = \sqrt{6} \ ;;$$

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2c)^2 + c^2 + 2^2} \ ;; \ 2\sqrt{6} = \sqrt{4c^2 + c^2 + 4} = \sqrt{5c^2 + 4} \ ;; \ 24 = 5c^2 + 4 \ ;; \ 20 = 5c^2 \ ;; \ c^2 = 4 \ ;; .$$

$c = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow$  Como tiene que ser  $c > 0$ , la solución es  $c = 2$ .

Son vectores directores del plano  $\pi$  pedido  $\vec{u} = (-1, 2, 0)$  y  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ . Considerando, por ejemplo, el punto A(1, 0, 0), la ecuación general de  $\pi$  es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 4(x-1) + 2z + 2y = 0 \ ;; \ 2(x-1) + z + y = 0 \ ;;$$

$$2x - 2 + y + z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 2x + y + z - 2 = 0}}.$$

\*\*\*\*\*

3º) Considere la ecuación  $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$  siendo  $\lambda$  una constante mayor que 2. Usando los teoremas de Bolzano y Rolle, probar que la ecuación admite una única solución no negativa y más pequeña que 1.

-----

Se considera la función  $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$ . Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es  $\mathbb{R}$ , por lo cual, lo será en cualquier intervalo real que se considere.

El teorema de Bolzano dice que “si una función  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ ”.

Teniendo en cuenta que  $f(0) = -1 < 0$  y  $f(1) = 1 + \lambda - 2 - 1 > 0$ , por ser  $\lambda > 2$ , según el Teorema de Bolzano, en el intervalo  $(0, 1)$  la función  $f(x)$  tiene, al menos, una raíz  $x = \alpha$ , teniendo que ser  $0 < \alpha < 1$ , valor no negativo y menor que 1, y tal que  $f(\alpha) = 0$ .

Vamos a demostrar ahora que la raíz es única.

Supongamos que existe otra "d", tal que  $0 < \alpha < d < 1$ . Aplicamos Rolle en  $(\alpha, d)$

Como  $f(x)$  es una función continua en el intervalo  $[\alpha, d]$  y derivable en  $(\alpha, d)$  y se cumple que  $f(\alpha) = f(d) = 0$ , existe al menos un punto  $c$  de  $(\alpha, d)$  que está incluido en  $(0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ ”.

$$f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x - 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 + 24}}{6} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 + 6}}{6} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 6}}{3} =$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 6}}{3} < 0 \quad ; \quad x_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 6}}{3} > 0.$$

Tomando las soluciones de  $f'(x)$  e igualándolas a cero (puesto que tiene que existir un número  $c$  de  $(\alpha, d)$  que está incluido en  $(0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ ), tenemos :

$\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 6}}{3} = 0$  y  $\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 6}}{3} = 0$ , es decir  $-\lambda = \pm \sqrt{\lambda^2 + 6}$ , elevando al cuadrado ambos miembros tenemos  $\lambda^2 = \lambda^2 + 6$ , de donde  $0 = 6$ , es decir tenemos que  $0 = 6$ , lo cual es absurdo. Este absurdo viene de suponer que hay otra solución en el intervalo  $(0, 1)$ .

\*\*\*\*\*

4º) Sea  $I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}} \cdot dx$ :

a) Expresar I aplicando el cambio de variable  $x = t^2$ .

b) Calcula el valor de I.

-----

a)

$$I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \rightarrow \sqrt{x} = t \\ dx = 2t dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow t = 1 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{2}{3+t} \cdot 2t dt = 4 \int_0^1 \frac{t}{3+t} \cdot dt = I.$$

b)

$$I = 4 \int_0^1 \frac{3+t-3}{3+t} \cdot dt = 4 \int_0^1 \left( 1 - \frac{3}{3+t} \right) \cdot dt = 4 \int_0^1 dt - 12 \int_0^1 \frac{1}{3+t} \cdot dt = 4 \cdot [t]_0^1 - 12I_1 = 4 \cdot (1-0) - 12I_1 =$$

$$= 4 - 12I_1 = I. \quad (*)$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{3+t} \cdot dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3+x = u \\ dx = du \end{array} \middle| \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow u = 4 \\ x = 0 \rightarrow u = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \int_3^4 \frac{1}{u} \cdot du = [Lu]_3^4 = L4 - L3 = I_1.$$

Sustituyendo el valor de  $I_1$  en la expresión (\*):

$$\underline{\underline{I = 4 - 12(L4 - L3)}}$$

\*\*\*\*\*