

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE BALEARES****JUNIO – 2012 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

**OPCIÓN A**

1º) a ) Calcule todas las matrices de dimensión 2x2 de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$  que satisfagan  $A^2 = O$ .

b ) Demostrar que las matrices del apartado anterior no son invertibles.

a )

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b & ab + bd \\ a + d & b + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + d = 0 \\ a + d = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ b + d^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{d = -a} \Rightarrow$$

$$a^2 - a = 0 \;; \; a(a - 1) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0 \rightarrow d_1 = 0 \rightarrow b_1 = 0} \;; \; \underline{a_2 = 1 \rightarrow d_2 = -1 \rightarrow b_2 = -1}.$$

Las matrices que cumplen la condición dada son  $\underline{A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$  ;;  $\underline{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

b )

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;; \; |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{A_1 \text{ y } A_2 \text{ no son invertibles.}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Calcule la recta perpendicular al plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $P_1(1, 1, 1)$ ,  $P_2(0, 2, 1)$ ,  $P_3(0, 0, -1)$  y pasa por el punto  $O(0, 0, 0)$ .

-----

Los puntos  $P_1(1, 1, 1)$ ,  $P_2(0, 2, 1)$  y  $P_3(0, 0, -1)$  determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0, 2, 1) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (0, 0, -1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, -2).$$

El vector normal del plano  $\pi$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores  $\vec{u} = (-1, 1, 0)$  y  $\vec{v} = (-1, -1, -2)$ :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2i + k + k - 2j = -2i - 2j + 2k = (-2, -2, 2) \Rightarrow \underline{\vec{n} = (1, 1, -1)}.$$

La recta  $r$  pedida es la que tiene como vector director a  $\vec{n} = (1, 1, -1)$  y pasa por el origen de coordenadas; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Calcule los máximos y mínimos de la función  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ .

-----

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 2x + 3) - (2x + 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 6 - 4x^2 - 4x - 2x - 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2x + 3)^2} =$$

$$= \frac{-2(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = f'(x).$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = 0 \quad ; \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = -2} \quad ; \quad \underline{x_2 = 1}.$$

$$f''(x) = \frac{(-4x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 3)^2 + 2(x^2 + x - 2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x + 3) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^4} =$$

$$= \frac{(-4x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 3) + 8(x^2 + x - 2)(x + 1)}{(x^2 + 2x + 3)^3} =$$

$$= \frac{-4x^3 - 8x^2 - 12x - 2x^2 - 4x - 6 + 8(x^3 + x^2 + x^2 + x - 2x - 2)}{(x^2 + 2x + 3)^3} =$$

$$= \frac{-4x^3 - 10x^2 - 16x - 6 + 8x^3 + 16x^2 - 8x - 16}{(x^2 + 2x + 3)^3} = \frac{4x^3 + 6x^2 - 24x - 22}{(x^2 + 2x + 3)^3} = f''(x).$$

$$f''(-2) = \frac{4 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) - 22}{[(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 3]^3} = \frac{-32 + 24 + 48 - 22}{(4 - 4 + 3)^3} = \frac{18}{27} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo}}.$$

$$f''(1) = \frac{4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 - 22}{(1^2 + 2 \cdot 1 + 3)^3} = \frac{4 + 6 - 24 - 22}{(1 + 2 + 3)^3} = \frac{-36}{6^3} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo}}.$$

$$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 3} = \frac{-4 + 1}{4 - 4 + 3} = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo relativo: A(-2, -1)}}.$$

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 + 2 \cdot 1 + 3} = \frac{2 + 1}{1 + 2 + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo relativo: B\left(1, \frac{1}{2}\right)}}.$$

\*\*\*\*\*

4º) Dibuje el recinto limitado por la curva  $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$  entre los valores  $x = 0$ ,  $x = 1$  y el eje OX. Calcule el área de este recinto.

-----

La función  $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$  está definida para cualquier valor real de  $x$ .

Por ser  $f(-x) = -f(x)$ , la función es simétrica con respecto al origen.

Por ser  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+3} = 0$ , el eje X es asíntota horizontal de la función.

No tiene asíntotas horizontales por ser  $x^2+3 \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2} = 0 \;; \; 3-x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -\sqrt{3}} \;; \; \underline{x_2 = \sqrt{3}}.$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2+3)^2 - (3-x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+3) - 4x(3-x^2)}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x - 12x + 4x^3}{(x^2+3)^3} = \frac{2x^3 - 18x}{(x^2+3)^3} = \underline{\underline{\frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3} = f''(x)}}.$$

$$f''_{(-\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3} = \frac{12\sqrt{3}}{6^3} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para } x = -\sqrt{3}}}.$$

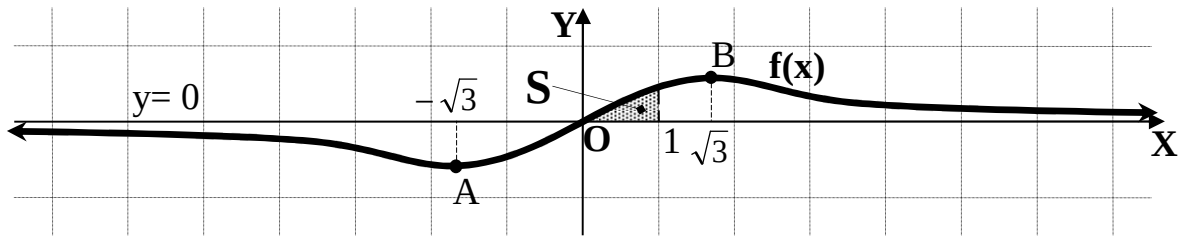
$$f''_{(\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3} = \frac{-12\sqrt{3}}{6^3} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo para } x = \sqrt{3}}}.$$

$$f_{(-\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}}{3+3} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } A\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}}.$$

$$\text{Por simetría con respecto al origen: } \underline{\underline{\text{Máximo: } B\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)}}.$$

Con los datos obtenidos puede hacerse una representación gráfica de la función con una cierta aproximación, como se hace a continuación.

Como se observa en la figura, entre los valores  $x = 0$  y  $x = 1$ , todas las ordenadas de la función  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$  son positivas por lo que el área pedida es la siguiente:



$$S = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3 = t \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x=1 \rightarrow t=4 \\ x=0 \rightarrow t=3 \end{array} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \int_3^4 \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot [Lt]_3^4 = \frac{1}{2} \cdot (L4 - L3) =$$

$$= \frac{1}{2} L \frac{4}{3} \cong \frac{1}{2} \cdot 0'2877 = \underline{\underline{0'144 u^2 = S}}.$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) a ) Calcule la posición relativa de las rectas  $r_1 \equiv \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$  y  $r_2 \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ .

b ) Calcule, si procede, o bien el punto de intersección o bien la recta perpendicular a las dos rectas dadas y que las corte.

-----

a )

Vamos a realizar el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas  $r_1$  y  $r_2$  es  $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ , cuyo estudio mediante

el teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;; M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices  $M$  y  $M'$ , la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango  $M$  = Rango  $M'$  = 2  $\Rightarrow$  (Puntos comunes)  $\Rightarrow$  Son rectas coincidentes.

Rango  $M$  = 2 ;; Rango  $M'$  = 3  $\Rightarrow$  (No hay puntos comunes)  $\Rightarrow$  Son rectas paralelas.

Rango  $M$  = Rango  $M'$  = 3  $\Rightarrow$  (Puntos comunes)  $\Rightarrow$  Las rectas se cortan en un punto.

Rango  $M$  = 3 ;; Rango  $M'$  = 4  $\Rightarrow$  (No hay puntos comunes)  $\Rightarrow$  Las rectas son secantes.

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_4\} \Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3-3-3+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Vamos a determinar ahora el rango de  $M$ :

$$\{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 3 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}$$

$\text{Rango } M = \text{Rango } M = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cortan en un punto}}}$

b)

El punto de intersección es la solución del sistema  $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ , que sabemos

que es compatible determinado. Para resolverlo despreciamos una ecuación, por ejemplo la primera, y resolvemos el sistema resultante.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 1} ;; \underline{y = -1} ;; z = x + y = \underline{0 = z} .$$

El punto de corte es P(1, -1, 0).

\*\*\*\*\*

2º) a ) Discuta el sistema  $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x+ay-az=0 \\ 3ax+6y-3z=-1 \end{cases}$  según los valores del parámetro  $\alpha$ .

b ) Resuelva el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 3a & 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & -a & 0 \\ 3a & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $\alpha$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 3a & 6 & -3 \end{vmatrix} = -3a + 6 - 6a^2 - 3a^2 + 6a + 6 = -9a^2 + 3a + 12 = -3(3a^2 - a - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$3a^2 - a - 4 = 0 \;; \; a = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{1 \pm 7}{6} \Rightarrow \underline{a_1 = -1} \;; \; \underline{a_2 = \frac{4}{3}}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$$


---

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

$$\text{Para } a = \frac{4}{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + 3F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$


---

b )

Resolvemos en los casos de compatible indeterminado.



Para  $\alpha = -1$  resulta el sistema 
$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x-y+z=0 \\ -3x+6y-3z=-1 \end{cases}.$$

Despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo  $z=\lambda$ , resulta:

$$\begin{cases} x+2y=-1-\lambda \\ x-y=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=-1-\lambda \\ -x+y=\lambda \end{cases} \Rightarrow 3y=-1 \;; \; \underline{y=-\frac{1}{3}} \;; \; x=y-\lambda=\underline{-\frac{1}{3}-\lambda=x}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\lambda \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=\lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in R$$


---



---

Para  $\alpha = \frac{4}{3}$  resulta el sistema 
$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x+\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}z=0 \\ 4x+6y-3z=-1 \end{cases}.$$

Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo  $z=\lambda$ , resulta:

$$\begin{cases} x+2y=-1-\lambda \\ 4x+6y=-1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x-6y=3+3\lambda \\ 4x+6y=-1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{x=2+6\lambda} \;; \; 2y=-1-\lambda-x=-1-\lambda-2-6\lambda=$$

$$=-3-7\lambda \;; \; \underline{y=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\lambda}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=2+6\lambda \\ y=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in R$$


---



---

\*\*\*\*\*

3º) Sea  $\alpha$  un valor real que está estrictamente entre -1 y 1 ( $-1 < \alpha < 1$ ). Definimos la función siguiente en función de  $\alpha$ :  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x - 3$ . Demuestre que la función anterior solo se anula para un valor de  $x$ .

-----

El estudio del crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x - 3$  es el siguiente:

$$f'(x) = x^2 + 2ax + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 - 1}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Para  $-1 < a < 1$  el valor de  $x$  de la expresión  $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$  carece de soluciones reales, lo que implica que la función es monótona en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ , independientemente del valor real de  $\alpha$ . Teniendo en cuenta que, por ser una función polinómica de grado impar, su recorrido es  $\mathbb{R}$ , implica necesariamente que:

La función  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x - 3$  se anula para un solo valor de  $x$

\*\*\*\*\*

4º) Calcule la siguiente integral indefinida:  $I = \int x \cdot \sqrt[3]{4+x^2} \cdot dx$ .

-----

$$I = \int x \cdot \sqrt[3]{4+x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4+x^2 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt[3]{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{3}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} \cdot t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} \cdot t \cdot \sqrt[3]{t} + C = \frac{3}{8} \cdot (4+x^2) \cdot \sqrt[3]{4+x^2} + C = I .$$

\*\*\*\*\*