PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2012 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) a) Calcule todas las matrices de dimensión 2x2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ que satisfagan $A^2 = O$.

b) Demostrar que las matrices del apartado anterior no son invertibles.

---

a)

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & ab+bd \\ a+d & b+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a^2+d=0 \\ a+d=0 \\ b(a+d)=0 \\ b+d^2=0 \end{array}\right\}\rightarrow \underline{d=-a}\ \Rightarrow$$

$$a^2-a=0\ ;;\ a(a-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0\rightarrow d_1=0\rightarrow b_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=1\rightarrow d_2=-1\rightarrow b_2=-1}.$$

Las matrices que cumplen la condición dada son $\underline{\underline{A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}\ ;;\ \underline{\underline{A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$

b)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;;\ |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1+1=0\ \Rightarrow\ \underline{A_1 \text{ y } A_2 \text{ no son inversibles}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcule la recta perpendicular al plano π que pasa por los puntos $P_1(1,\ 1,\ 1)$, $P_2(0,\ 2,\ 1)$, $P_3(0,\ 0,\ -1)$ y pasa por el punto O(0, 0, 0).

Los puntos $P_1(1,\ 1,\ 1)$, $P_2(0,\ 2,\ 1)$ y $P_3(0,\ 0,\ -1)$ determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0,\ 2,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ 1,\ 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (0,\ 0,\ -1) - (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ -1,\ -2).$$

El vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (-1,\ 1,\ 0)$ y $\vec{v} = (-1,\ -1,\ -2)$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2i + k + k - 2j = -2i - 2j + 2k = (-2,\ -2,\ 2) \Rightarrow \underline{\vec{n} = (1,\ 1,\ -1)}.$$

La recta r pedida es la que tiene como vector director a $\vec{n} = (1,\ 1,\ -1)$ y pasa por el origen de coordenadas; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases},\ \forall \lambda \in R}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Calcule los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$.

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x^2+2x+3)-(2x+1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{2x^2+4x+6-4x^2-4x-2x-2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2x+3)^2}=$$

$$=\underline{\frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2x+3)^2}=f'(x)}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2x+3)^2}=0\ ;;\ x^2+x-2=0\ ;;\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow\underline{x_1=-2}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

$$f''(x)=\frac{(-4x-2)\cdot(x^2+2x+3)^2+2(x^2+x-2)\cdot2\cdot(x^2+2x+3)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+3)^4}=$$

$$=\frac{(-4x-2)\cdot(x^2+2x+3)+8(x^2+x-2)(x+1)}{(x^2+2x+3)^3}=$$

$$=\frac{-4x^3-8x^2-12x-2x^2-4x-6+8(x^3+x^2+x^2+x-2x-2)}{(x^2+2x+3)^3}=$$

$$=\frac{-4x^3-10x^2-16x-6+8x^3+16x^2-8x-16}{(x^2+2x+3)^3}=\underline{\frac{4x^3+6x^2-24x-22}{(x^2+2x+3)^3}=f''(x)}.$$

$$f''(-2)=\frac{4\cdot(-2)^3+6\cdot(-2)^2-24\cdot(-2)-22}{[(-2)^2+2\cdot(-2)+3]^3}=\frac{-32+24+48-22}{(4-4+3)^3}=\frac{18}{27}>0\Rightarrow\underline{\textit{Mínimo}}.$$

$$f''(1)=\frac{4\cdot1^3+6\cdot1^2-24\cdot1-22}{(1^2+2\cdot1+3)^3}=\frac{4+6-24-22}{(1+2+3)^3}=\frac{-36}{6^6}<0\Rightarrow\underline{\textit{Máximo}}.$$

$$f(-2)=\frac{2\cdot(-2)+1}{(-2)^2+2\cdot(-2)+3}=\frac{-4+1}{4-4+3}=\frac{-3}{3}=-1\Rightarrow\underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}:\ A(-2,\ -1)}}.$$

$$f(1)=\frac{2\cdot1+1}{1^2+2\cdot1+3}=\frac{2+1}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\underline{\underline{\textit{Máximo relativo}:\ B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dibuje el recinto limitado por la curva $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ entre los valores x = 0, x = 1 y el eje OX. Calcule el área de este recinto.

La función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ está definida para cualquier valor real de x.

Por ser $f(-x)=-f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

Por ser $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2+3}=0$, el eje X es asíntota horizontal de la función.

No tiene asíntotas horizontales por ser $x^2+3\neq 0,\ \forall x\in R$.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}=0\ ;;\ 3-x^2=0\Rightarrow \underline{x_1=-\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{x_2=\sqrt{3}}.$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+3)^2-(3-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+3)-4x(3-x^2)}{(x^2+3)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-6x-12x+4x^3}{(x^2+3)^3}=\frac{2x^3-18x}{(x^2+3)^3}=\underline{\frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}=f''(x)}.$$

$$f''_{(-\sqrt{3})}=\frac{-2\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3}=\frac{12\sqrt{3}}{6^3}>0\Rightarrow \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-\sqrt{3}}.$$

$$f''_{(\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3}=\frac{-12\sqrt{3}}{6^3}<0\Rightarrow \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=\sqrt{3}}.$$

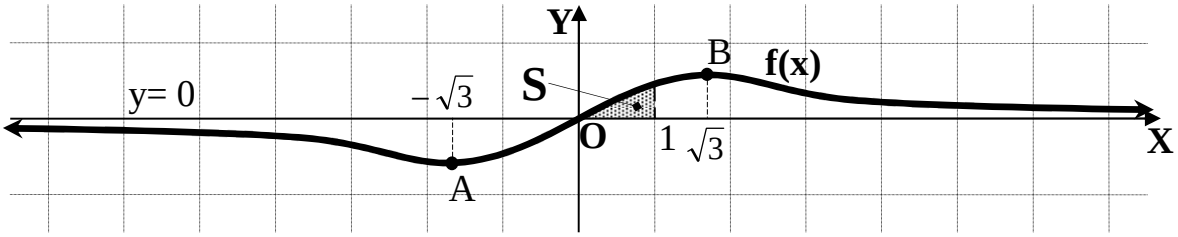
$$f_{(-\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{3}}{3+3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ A\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}}.$$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{\underline{Máximo:\ B\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right)}}$.

Con los datos obtenidos puede hacerse una representación gráfica de la función con una cierta aproximación, como se hace a continuación.

www.yoquieroaprobar.es

Como se observa en la figura, entre los valores x = 0 y x = 1, todas las ordenadas de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$ son positivas por lo que el área pedida es la siguiente:



$$S=\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l|l} x^2+3=t & x=1\to t=4 \\ xdx=\frac{1}{2}dt & x=0\to t=3 \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot\int_3^4 \frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot[Lt]_3^4=\frac{1}{2}\cdot(L4-L3)=$$

$$=\frac{1}{2}L\frac{4}{3}\cong\frac{1}{2}\cdot 0'2877=\underline{\underline{0'144\ u^2=S}}\ .$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) a) Calcule la posición relativa de las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$.

b) Calcule, si procede, o bien el punto de intersección o bien la recta perpendicular a las dos rectas dadas y que las corte.

---

a)

Vamos a realizar el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas r_1 y r_2 es $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$, cuyo estudio mediante el teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;; \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas son secantes.

$$Rango \;\; M' \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_4\} \Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3-3-3+3=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{Rango \;\; M' = 3}$

Vamos a determinar ahora el rango de M:

www.yoquieroaprobar.es

$$\{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3-2-3+1=-1 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M=3}$$

$$\underline{Rango\ M = Rango\ \ M = 3} \Rightarrow \underline{\underline{Las\ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ un\ \ punto}}$$

b)

El punto de intersección es la solución del sistema $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$, que sabemos que es compatible determinado. Para resolverlo despreciamos una ecuación, por ejemplo la primera, y resolvemos el sistema resultante.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=0 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=1}\ ;;\ \underline{y=-1}\ ;;\ z=x+y=\underline{0=z}\ .$$

<u>El punto de corte es P(1, -1, 0).</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) a) Discuta el sistema $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x+ay-az=0 \\ 3ax+6y-3z=-1 \end{cases}$ según los valores del parámetro α.

b) Resuelva el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 3a & 6 & -3 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & -a & 0 \\ 3a & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 3a & 6 & -3 \end{vmatrix}=-3a+6-6a^2-3a^2+6a+6=-9a^2+3a+12=-3\left(3a^2-a-4\right)=0 \Rightarrow$$

$$3a^2-a-4=0 \;;;\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{1\pm 7}{6} \Rightarrow \underline{a_1=-1} \;;;\; \underline{a_2=\tfrac{4}{3}}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq \frac{4}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}=1-6+3+2=0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}.$$

$$Para\ a=\tfrac{4}{3} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+3F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=\frac{4}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

b)

Resolvemos en los casos de compatible indeterminado.

www.yoquieroaprobar.es

Para α = -1 resulta el sistema $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x-y+z=0 \\ -3x+6y-3z=-1 \end{cases}$.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=-1-\lambda \\ x-y=-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=-1-\lambda \\ -x+y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=-1 \;;;\; \underline{y=-\tfrac{1}{3}} \;;;\; x=y-\lambda=\underline{-\tfrac{1}{3}-\lambda=x}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-\tfrac{1}{3}-\lambda \\ y=-\tfrac{1}{3} \\ z=\lambda \end{cases}, \ \forall\lambda\in R}}$$

Para $\alpha=\frac{4}{3}$ resulta el sistema $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x+\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}z=0 \\ 4x+6y-3z=-1 \end{cases}$.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=-1-\lambda \\ 4x+6y=-1+3\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x-6y=3+3\lambda \\ 4x+6y=-1+3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=2+6\lambda} \;;;\; 2y=-1-\lambda-x=-1-\lambda-2-6\lambda=$$

$$=-3-7\lambda \;;;\; \underline{y=-\tfrac{3}{2}-\tfrac{7}{2}\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=2+6\lambda \\ y=-\tfrac{3}{2}-\tfrac{7}{2}\lambda, \\ z=\lambda \end{cases} \ \forall\lambda\in R}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Sea α un valor real que está estrictamente entre -1 y 1 (-1 < α < 1). Definimos la función siguiente en función de α: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x-3$. Demuestre que la función anterior solo se anula para un valor de x.

El estudio del crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x-3$ es el siguiente:

$$f'(x)=x^2+2ax+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=\frac{-2a\pm 2\sqrt{a^2-1}}{2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}.$$

Para $-1<a<1$ el valor de x de la expresión $-a\pm\sqrt{a^2-1}$ carece de soluciones reales, lo que implica que la función es monótona en su dominio, que es R, independientemente del valor real de α. Teniendo en cuenta que, por ser una función polinómica de grado impar, su recorrido es R, implica necesariamente que:

$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x-3\ \ se\ \ anula\ \ para\ \ un\ \ solo\ \ valor\ \ de\ \ x}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\cdot dx$.

$$I=\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4+x^2=t \\ 2x\cdot dx=dt \\ x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\cdot\int\sqrt[3]{t}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{3}}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\cdot t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\cdot t\cdot\sqrt[3]{t}+C=\underline{\underline{\frac{3}{8}\cdot\left(4+x^2\right)\cdot\sqrt[3]{4+x^2}+C=I}}\,.$$

****

www.yoquieroaprobar.es