PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de una manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por los alumnos. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula su rango en función de α.

b) Calcular A^{-1} para α = 1.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a^2(a-1)+3a(2+a)-2a(a-1)=a^3-a^2+6a+3a^2-2a^2+2a=$$

$$=a^3+8a=a(a^2+8)=0 \Rightarrow \underline{a=0} \rightarrow (a^2+8)>0,\ \forall a\in R.$$

<u>Para α ≠ 0 → Rango A = 3</u>

Para α = 0 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A=2}$.

<u>Para α = 0 → Rango A = 2</u>

b)

Para α = 1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para hallar la inversa de A se utiliza el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&0&3&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&0&3&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&-3&-1&-1&0&1\\0&0&3&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F_2\to-\tfrac{1}{3}F_2\\F_3\to\tfrac{1}{3}F_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&1&\tfrac{1}{3}&\tfrac{1}{3}&0&-\tfrac{1}{3}\\0&0&1&0&\tfrac{1}{3}&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-3F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&\tfrac{1}{3}&\tfrac{1}{3}&0&-\tfrac{1}{3}\\0&0&1&0&\tfrac{1}{3}&0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F_1\to F_1-F_3\\F_2\to F_2-\tfrac{1}{3}F_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-\tfrac{1}{3}&1\\0&1&0&\tfrac{1}{3}&-\tfrac{1}{9}&-\tfrac{1}{3}\\0&0&1&0&\tfrac{1}{3}&0\end{array}\right)\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\tfrac{1}{3}&1\\\tfrac{1}{3}&-\tfrac{1}{9}&-\tfrac{1}{3}\\0&\tfrac{1}{3}&0\end{pmatrix}}}.$$

****

2º) a) Discuta para que valores de α el sistema $\left.\begin{array}{r}(a+3)x+(2a-1)y=0\\(a+1)x-az=a\\2x+(a-2)y-az=a\end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a+3 & 2a-1 & 0\\ a+1 & 0 & -a\\ 2 & a-2 & -a\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}a+3 & 2a-1 & 0 & 0\\ a+1 & 0 & -a & a\\ 2 & a-2 & -a & a\end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a+3 & 2a-1 & 0\\ a+1 & 0 & -a\\ 2 & a-2 & -a\end{vmatrix}=-2a(2a-1)+a(a-2)(a+3)+a(a+1)(2a-1)=$$

$$=-2a(2a-1)+a\left(a^2+3a-2a-6+2a^2-a+2a-1\right)=-4a^2+2a+a\left(3a^2+2a-7\right)=$$

$$=-4a^2+2a+3a^3+2a^2-7a=3a^3-2a^2-5a=a\left(3a^2-2a-5\right)=0 \;;;\; \underline{a_1=0} \;;;\; 3a^2-2a-5=0 \;;;$$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{2\pm 8}{6} \Rightarrow \underline{a_2=-1} \;;;\; \underline{a_3=\tfrac{5}{3}}.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c}a\neq 0\\ a\neq -1\\ a\neq \frac{5}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ determinado}$$

Nótese que, por ser $C_3 = -C_4$, los rangos de M y M' son iguales para cualquier valor real de α.

Para α = 0 es $M=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango M = 2.

Para α = -1 es $M=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango M = 2.

Para α = 5/3 es $M = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>Rango M = 2</u>.

$$Para \ \left.\begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = \frac{5}{3} \end{cases}\right\} \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M' = 2 < n^o \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ in\det er\min ado$$

<u>El sistema es compatible para cualquier valor real de α.</u>

b)

Resolvemos en los casos de compatible indeterminado:

Para α = 0 es $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ x = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ Solución: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$.

Para α = -1 es $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ \underline{z = -1} \\ 2x - 3y + z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 3y = 0 \ ;; \ \underline{x = \lambda} \ ;; \ \underline{y = \frac{2}{3}\lambda}$.

$$Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}\lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = -1 \end{cases}$$

Para α = 5/3 es $\left.\begin{array}{r} \frac{14}{3}x + \frac{7}{3}y = 0 \\ \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}z = \frac{5}{3} \\ 2x - \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}z = \frac{5}{3} \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ 8x - 5z = 5 \\ 6x - y - 5z = 5 \end{array}\right\}$. Despreciando la tercera ecuación y haciendo $\underline{x = \lambda}$;

$\underline{y = -2\lambda}, \ 6\lambda + 2\lambda - 5z = 5 \ ;; \ 5z = -5 + 8\lambda \ ;; \ \underline{z = -1 + \frac{8}{5}\lambda}$.

$$Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \quad , \ \forall \lambda \in R \\ z = -1 + \frac{8}{5}\lambda \end{cases}$$

****

3º) Sea la función $f(x)=sen\,(2x)-x$. Demostrar que la función f(x) tiene exactamente tres ceros en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. O sea, debe probar que existen exactamente tres valores de x en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ tales que f(x) = 0.

La función $f(x)=sen\,(2x)-x$, además de pasar por el origen por ser f(0) = 0, también es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x)=sen\,(-2x)+x=x-sen\,(2x)=-f(x)$.

De lo anterior se deduce que uno de los ceros es para $\underline{x_1=0}$.

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo real que se considere.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma: “Si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$”.

Los máximos y mínimos relativos que tiene la función en el intervalo considerado son los siguientes.

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x)=2\cos\,(2x)-1=0\Rightarrow \cos\,(2x)=\frac{1}{2}\ ;;\ 2x=arc\ \cos\frac{1}{2}=2k\pi\pm 60^{\circ}\ ;;\ x=k\pi\pm 30^{\circ},\ \forall k\in Z\,.$$

Las únicas soluciones pertenecientes al intervalo son $\underline{x_1=30^{\circ}=\frac{\pi}{6}}$ y $\underline{x_2=-30^{\circ}=-\frac{\pi}{6}}$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=-4sen\,(2x)\ \Rightarrow\ f''\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)=4sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}<0\Rightarrow \underline{Máx.\ \ para\ \ x=-\frac{\pi}{6}}\,.$$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mín.\ \ para\ \ x=\frac{\pi}{6}}$.

$$f\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-sen\,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=-sen\ 60^{\circ}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}\cong 1'09\,.$$

$\underline{Máx. \Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}\right)}$. Por simetría: $\underline{Mín. \Rightarrow B\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{6}\right)}$.

Aplicando el teorema de Bolzano a los valores extremos del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{6}\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)= sen\ (-\pi)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-sen\ \pi+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}>0 \\ \\ f\left(-\frac{\pi}{6}\right)= sen\ \left(-\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-sen\ \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}<0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Esto implica que la función f(x) tiene un cero para un valor x_2, tal que: $-\frac{\pi}{2}<x_2<-\frac{\pi}{6}$ y, por simetría, el tercer cero para x_3, tal que: $\frac{\pi}{6}<x_3<\frac{\pi}{2}$.

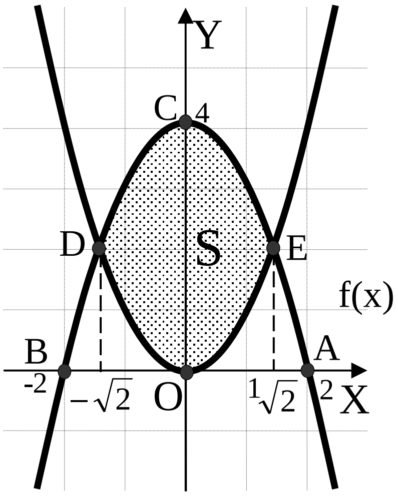
Teniendo en cuenta lo anterior y, en particular la continuidad de f(x), queda demostrado que:

$$\underline{\underline{Las\ \ únicas\ \ raíces\ \ de\ \ f(x)=sen\ (2x)-x\ \ en\ \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\ son\ \ x_1=0,\ x_1=-\frac{\pi}{6}\ \ y\ \ x_3=\frac{\pi}{6}}}$$

****

4º) Haga un dibujo del recinto limitado por las curvas $y_1(x)=4-x^2$ e $y_2(x)=x^2$. Calcular el área de este recinto.

Las dos parábolas son funciones simétricas con respecto al eje de ordenadas.



Los puntos de corte con los ejes de las curvas son:

Eje X $\rightarrow y=0$:

$$y=4-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2=-2 \rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}.$$

$$y=x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}.$$

Eje Y: $\rightarrow x=0 \Rightarrow y=4-x^2 \rightarrow y=4 \Rightarrow \underline{C(0,\ 4)}$.

Los puntos de corte entre las curvas son los siguientes:

$$4-x^2=x^2 \ ;;\ 2x^2=4 \ ;;\ x^2=2 \Rightarrow x_1=-\sqrt{2} \rightarrow \underline{D\left(-\sqrt{2},\ 2\right)} \ ;;\ x_2=\sqrt{2} \rightarrow \underline{E\left(\sqrt{2},\ 2\right)}.$$

La representación gráfica de la situación se puede observar en el gráfico adjunto.

Teniendo en cuenta las simetrías de las funciones, el área pedida es la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\left[\left(4-x^2\right)-x^2\right]\cdot dx=2\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-x^2-x^2\right)\cdot dx=2\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-2x^2\right)\cdot dx=4\cdot\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=4\cdot\left[\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2^3}}{3}\right)-0\right]=4\cdot\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=8\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=8\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{16\sqrt{2}}{3}\ u^2=S}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Consideremos el punto P(1, 2, 3) y la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

a) Calcular la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.

b) Calcular el punto simétrico del punto P respecto a la recta r.

----

a)

Un punto y un vector director de r son Q(2, -1, 1) y $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 2,\ 1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,\ -1,\ 1) - (1,\ 2,\ 3) = (1,\ -3,\ -2).$$

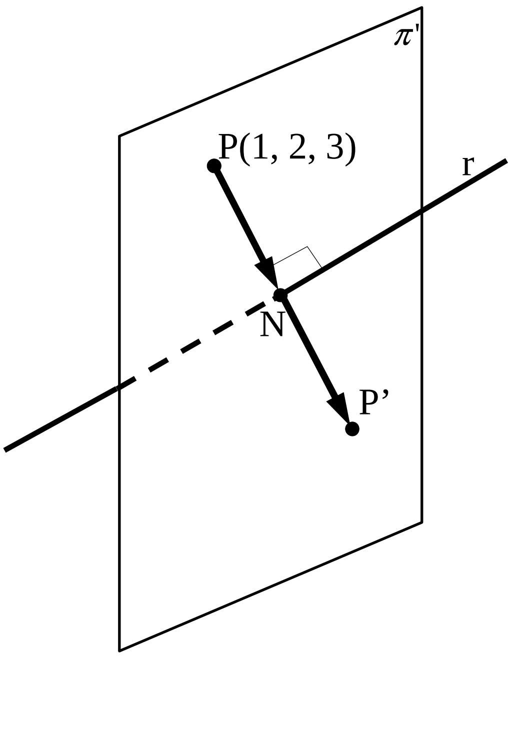
$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-4(x-1) + (y-2) - 9(z-3) - 2(z-3) + 3(x-1) + 6(y-2) = 0 \ ;; \ -(x-1) + 7(y-2) - 11(z-3) = 0 \ ;;$$

$$-x + 1 + 7y - 14 - 11z + 33 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x - 7y + 11z - 20 = 0}}.$$

b)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}}$.



El plano π', perpendicular a r por P(1, 2, 3), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 2,\ 1)$ y contiene al punto P:

$$\left.\begin{matrix} \pi' \equiv 3x + 2y + z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + D = 0 \ ;;$$

$$3 + 4 + 3 + D = 0 \ ;; \ 10 + D = 0 \ ;; \ D = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi' \equiv 3x + 2y + z - 10 = 0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\pi' \equiv 3x+2y+z-10=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \ 3\cdot(2+3\lambda)+2\cdot(-1+2\lambda)+(1+\lambda)-10=0 \ ;;$$

$$6+9\lambda-2+4\lambda+1+\lambda-10=0 \ ;; \ 14\lambda-5=0 \ ;; \ \underline{\lambda=\frac{5}{14}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+\frac{15}{14}=\frac{43}{14} \\ y=-1+\frac{10}{14}=-\frac{4}{14} \\ z=1+\frac{5}{14}=\frac{19}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{N\left(\frac{43}{14},\ \frac{-4}{14},\ \frac{19}{14}\right)}.$$

Para que P’ sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP'} \Rightarrow \ N-P=P'-N \ ;; \ \left(\frac{43}{14},\ -\frac{4}{14},\ \frac{19}{14}\right)-(1,\ 2,\ 3)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{43}{14},\ -\frac{4}{14},\ \frac{19}{14}\right) ;;$$

$$\left(\frac{43}{14}-1,\ -\frac{4}{14}-2,\ \frac{19}{14}-3\right)=\left(x-\frac{43}{14},\ y+\frac{4}{14},\ z-\frac{19}{14}\right) \ ;;$$

$$\left(\frac{29}{14},\ -\frac{32}{14},\ -\frac{23}{14}\right)=\left(x-\frac{43}{14},\ y+\frac{4}{14},\ z-\frac{19}{14}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\frac{43}{14}=\frac{29}{14} \rightarrow x=\frac{72}{14}=\frac{36}{7} \\ y+\frac{4}{14}=-\frac{32}{14} \rightarrow y=-\frac{36}{14}=-\frac{18}{7} \\ z-\frac{19}{14}=-\frac{23}{14} \rightarrow z=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{\underline{P'\left(\frac{36}{7},\ -\frac{18}{7},\ -\frac{2}{7}\right)}}.$$

****

2º) a) Discutir para que valores de α y b el sistema $\left.\begin{array}{r}(a-1)x+5ay+az=a-b\\ y-2az=a+b\\ 3ay+(2-a)z=b\end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a-1 & 5a & a \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 3a & 2-a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a-1 & 5a & a & a-b \\ 0 & 1 & -2a & a+b \\ 0 & 3a & 2-a & b \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a-1 & 5a & a \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 3a & 2-a \end{vmatrix}=(a-1)(2-a)+6a^2(a-1)=(a-1)(2-a+6a^2)=$$

$$=(a-1)(6a^2-a+2)=0\ ;;\ \underline{a_1=1}\ ;;\ 6a^2-a+2=0\ ;;\ a=\frac{1\pm\sqrt{1-48}}{12}\ \Rightarrow\ \underline{a\notin R}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ b\in R \end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ \det er\min ado}}$$

Para α = 1 es $M'=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1+b \\ 0 & 3 & 1 & b \end{pmatrix}$. El rango de M’ en función del parámetro b es el siguiente: $|M'|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1-b \\ 1 & -2 & 1+b \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix}=-10b+(1-b)+3(1+b)+6(1-b)-5(1+b)-b=$

$$=-10b+1-b+3+3b+6-6b-5-5b-b=5-20b=5(1-4b)=0\ \Rightarrow\ \underline{b=\frac{1}{4}}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ b=\frac{1}{4} \end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=1 \\ b\neq\frac{1}{4} \end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

b)

El sistema es compatible indeterminado cuando α = 1 y b = ¼. El sistema resulta ser el siguiente: $\left.\begin{array}{r} 5y+z=\frac{3}{4} \\ y-2z=\frac{5}{4} \\ 3y+z=\frac{1}{4} \end{array}\right\}$. Despreciando la segunda ecuación y resolviendo por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 5y+z=\frac{3}{4} \\ 3y+z=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5y+z=\frac{3}{4} \\ -3y-z=-\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=\frac{1}{2} \;;;\; \underline{y=\frac{1}{4}} \;;;\; \frac{3}{4}+z=\frac{1}{4} \;;;\; \underline{z=-\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{1}{4} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} , \ \forall \lambda \in R}}$$

****

3º) Sea la función $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$.

a) Calcular los extremos de la función f(x).

b) Estudiar cuando la función f(x) es cóncava o convexa.

----

a)

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anula su primera derivada en ese punto.

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{x-2-x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x^2-3x+2}.$$

$$f'(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x-3=0 \;;;\; \underline{x=\frac{3}{2}}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(x^2-3x+2\right)^2-(2x-3)\cdot 2\cdot\left(x^2-3x+2\right)\cdot(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^4}=\frac{2\cdot\left(x^2-3x+2\right)-2\cdot(2x-3)^2}{\left(x^2-3x+2\right)^3}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(x^2-3x+2\right)-2\cdot\left(4x^2-12x+9\right)}{\left(x^2-3x+2\right)^3}=\frac{2x^2-6x+4-8x^2+24x-18}{\left(x^2-3x+2\right)^3}=\frac{-6x^2+18x-14}{\left(x^2-3x+2\right)^3}=$$

$$\underline{=\frac{-2\left(3x^2-9x+7\right)}{\left(x^2-3x+2\right)^3}=f''(x)}.$$

$$f''\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{-2\left[3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-9\cdot\frac{3}{2}+7\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}+2\right]^3}=\frac{-2\cdot\left(\frac{27}{4}-\frac{27}{2}+7\right)}{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2\right)^3}=\frac{-\frac{27}{2}+27-14}{\left(\frac{9-18+8}{4}\right)^3}=\frac{-\frac{27}{2}+13}{\left(\frac{-1}{4}\right)^3}=\frac{<0}{<0} => 0 \Rightarrow Mín.$$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{1}{\frac{3}{2}-1}-\frac{1}{\frac{3}{2}-2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2+2=4 \Rightarrow \underline{\underline{Mín. \Rightarrow P\left(\frac{3}{2},\ 4\right)}}.$$

b)

Para que una función sea cóncava o convexa en un punto es condición necesaria que su segunda derivada sea negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-2(3x^2-9x+7)}{(x^2-3x+2)^3}=0 \;;\; 3x^2-9x+7=0 \;;\; x=\frac{9\pm\sqrt{91-84}}{6}=\frac{9\pm\sqrt{7}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{9-\sqrt{7}}{6} \\ x_2=\dfrac{9+\sqrt{7}}{6} \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que:

1º - El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R-\{1,\ 2\}$, lo que supone que el dominio se divide en los intervalos $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 2)$ y $(2,\ +\infty)$.

2º - Que el único extremo relativo (mínimo) se produce para $x=\frac{3}{2}$ y que $x_1=\frac{9-\sqrt{7}}{6}\cong 1'06$ y $x_2=\frac{9+\sqrt{7}}{6}\cong 1'94$.

3º - $f''(0)=\frac{-14}{8}<0 \Rightarrow Concavidad\ (\cap)$.

4º) – El valor de $f''(x),\ x>2$, por ejemplo x = 3: $f''(3)=\frac{-2(3\cdot 3^2-9\cdot 3+7)}{(3^2-3\cdot 3+2)^3}=\frac{-14}{8}<0$.

los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{\underline{Concavidad:\ f''(x)<0 \Rightarrow (\cap) \Rightarrow (-\infty,\ 1)\cup\left(1,\ \frac{9-\sqrt{7}}{6}\right)\cup\left(\frac{9+\sqrt{7}}{6},\ 2\right)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Convexidad:\ f''(x)>0 \Rightarrow (\cup) \Rightarrow \left(\frac{9-\sqrt{7}}{6},\ \frac{9+\sqrt{7}}{6}\right)}}$$

****

4º) Calcular la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\cdot dx=\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\cdot dx.$$

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}=\frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2}{x^2(x+1)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}A+C=0\\ A+B=1\\ \underline{B=-1}\end{array}\right\}\rightarrow\ \Rightarrow\ \underline{A=2}\ ;;\ \underline{C=-2}.$$

$$I=\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\cdot dx=2\int \frac{1}{x}\cdot dx-\int \frac{1}{x^2}\cdot dx-2\int \frac{1}{x+1}dx=2L|x|-\int x^{-2}\cdot dx-2L|x+1|=$$

$$=2L\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{x^{-1}}{-1}+C=\underline{\underline{L\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}+C=I}}.$$

****