PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, calcule los valores de α para los cuales la matriz $A^2 - A$ no tenga inversa.

b) En el supuesto de α = 1, hallar todas las matrices X que satisfacen A · X + I = A, siendo I la matriz identidad.

---

a)

Una matriz no tiene inversa cuando el valor de su determinante es cero:

$$\left|A^2 - A\right| = \left|A\cdot(A-I)\right| = \left|A\right|\cdot\left|A-I\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$(a^2+2a-a+1)(a^2-1-a+1)=0 \;;;\; (a^2+a+1)(a^2-a)=0.$$

Por ser $a^2+a+1\neq 0,\ \forall a\in R$, tiene que ser $(a^2-a)=0 \;;;\; a(a-1)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=1}$.

Soluciones:

$$\underline{\underline{A^2 - A \ \ no\ \ tiene\ \ inversa\ \ para\ \ a=0\ \ y\ \ para\ \ a=-1}}$$

b)

Para α = 1 es $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A\cdot X + I = A \;;;\; A\cdot X = A - I$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(A-I) \;;;\; I\cdot X = A^{-1}\cdot(A-I) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot(A-I)}.$$

La inversa de A se hace por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{3}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A - I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) a) Discuta para que valores de α y b para que el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+(2a+1)y-az=1 \\ ax+y-az=-2b \\ ay+(1-a)z=b \end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a & 1 \\ a & 1 & -a & -2b \\ 0 & a & 1-a & b \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ 0 & a & 1-a \end{vmatrix}=a(1-a)-a^3+a^3-a(1-a)(2a+1)=0 \;;;$$

$$a-a^2-a(2a+1-2a^2-a)=0 \;;;\; a-a^2-2a^2-a+2a^3+a^2=0 \;;;\; 2a^3-2a^2=0 \;;;\; 2a^2(a-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_1=a_2=0} \;;;\; \underline{a_3=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado}}$$

(para cualquier valor real de b)

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2b \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2b \end{vmatrix}=2b+1=0 \Rightarrow \underline{b=-\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a=0 \\ b=-\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a=0 \\ b\neq -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$ Veamos el rango de M':

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2b \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = b+1+2b-3b = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=1 \\ b \in R \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \ Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3\ \ \Rightarrow\ \ Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α = 0 y $b = -\dfrac{1}{2}$ el sistema es $\left.\begin{matrix} y=1 \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \quad \forall \lambda \in R \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}}}$$

****

3º) Considere la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos\ x}$.

a) Verifique que $f(0)=f(\pi)=0$.

b) Compruebe que la ecuación $f'(x)=0$ no tiene ninguna solución en el intervalo (0, π).

c) Explique porqué no es posible aplicar el teorema de Rolle en este caso.

---

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{sen\ 0}{\frac{1}{2}+\cos\ 0}=\dfrac{0}{\frac{1}{2}+1}=0 \\ \\ f(\pi)=\dfrac{sen\ \pi}{\frac{1}{2}+\cos\ \pi}=\dfrac{0}{\frac{1}{2}-1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{f(0)=f(\pi)=0}}$$, como debíamos verificar.

b)

$$f'(x)=\frac{\cos\ x\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos\ x\right)-sen\ x\cdot(-sen\ x)}{\left(\frac{1}{2}+\cos\ x\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cos\ x+\cos^2 x+sen^2\ x}{\left(\frac{1}{2}+\cos\ x\right)^2}=\underline{\frac{\frac{1}{2}\cos\ x+1}{\left(\frac{1}{2}+\cos\ x\right)^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cos\ x+1}{\left(\frac{1}{2}+\cos\ x\right)^2}=0\ ;;\ \frac{1}{2}\cos\ x+1=0\ ;;\ \cos\ x+2=0\ ;;\ \cos\ x=-2 \Rightarrow \underline{x\notin R}.$$

<u>f'(x) = 0 no tiene solución en el intervalo (0, π) ni en ningún otro intervalo real.</u>

c)

El teorema de Rolle dice que "si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que f(α) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que f'(x) = 0".

No es posible aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos\ x}$ en el intervalo (0, π) porque f(x) no está definida para $x=120^{o}=\dfrac{3\pi}{4}$ que es un valor del intervalo dado.

****

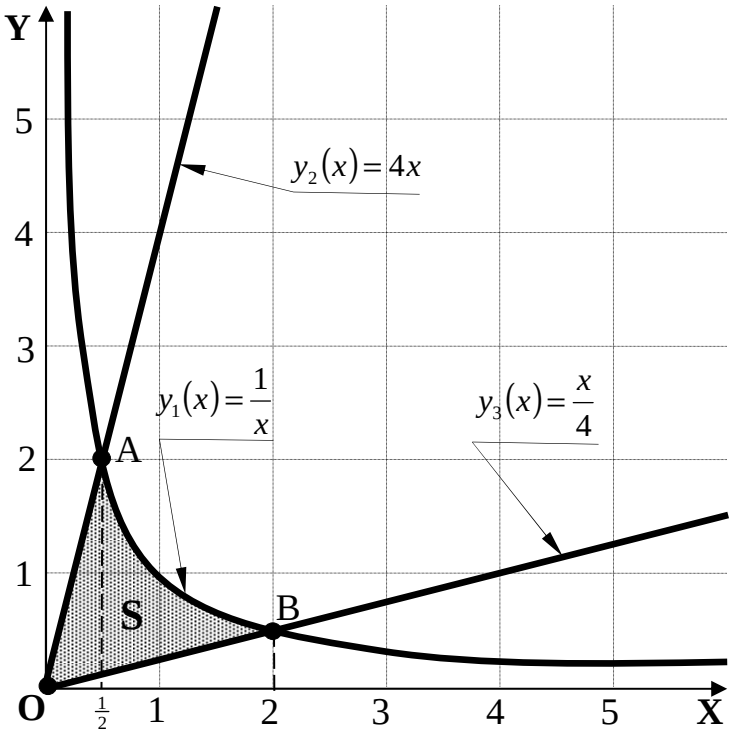
4º) Dibuje el recinto limitado por las curvas $y_1(x)=\frac{1}{x}$, $y_2(x)=4x$ e $y_3(x)=\frac{x}{4}$, para los valores positivos de x. Calcule el área de este recinto.

Los puntos de corte de $y_1(x)=\frac{1}{x}$ con las otras dos funciones en el primer cuadrante son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x)=\frac{1}{x} \\ y_2(x)=4x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=4x \;;;\; 4x^2=1 \;;;\; x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{1}{2},\ 2\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x)=\frac{1}{x} \\ y_2(x)=x/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x}{4} \;;;\; x^2=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \underline{B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}[y_2(x)-y_3(x)]\cdot dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}[y_1(x)-y_3(x)]\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(4x-\frac{x}{4}\right)\cdot dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^2}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[L\,x-\frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\left[2x^2-\frac{x^2}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left(L\,2-\frac{2^2}{8}\right)-\left[L\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^2}{8}\right]=$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(1/2)^2}{8} + L2 - \frac{1}{2} - L1 + L2 + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} + L2 - \frac{1}{2} - 0 + L2 + \frac{1}{32} = \underline{2L2}\,.$$

$$\underline{\underline{S = L4 \cong 1'39\ u^2}}\,.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados el punto P(1, 1, 1) y el plano $\pi \equiv x - y + z = 5$:

a) Calcule unas ecuaciones continuas de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Calcule el punto simétrico del punto P con respecto al plano π.

---

a)

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (1,\ -1,\ 1)$.

La expresión por unas ecuaciones continuas de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π es la siguiente:

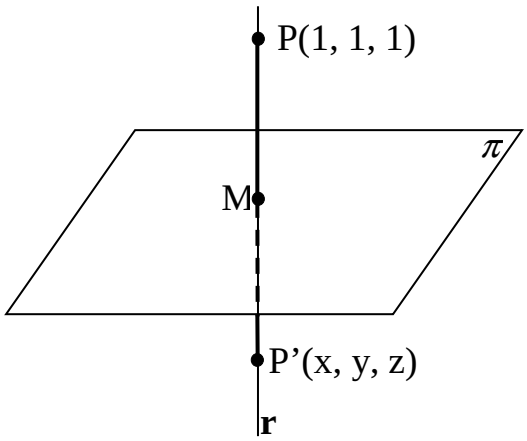
$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}}}$$

b)

El punto M, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda) - (1-\lambda) + (1+\lambda) - 5 = 0 \ ;;\ 1 + \lambda - 1 + \lambda + 1 + \lambda - 5 = 0 \ ;;$$

$$3\lambda - 4 = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = \frac{4}{3}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1 - \frac{4}{3} = \frac{-1}{3} \\ z = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{7}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{7}{3}\right)}.$$



Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse lo si-

guiente:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'} \Rightarrow M - P = P' - M \;;;\; \left(\frac{7}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{7}{3}\right) - (1,\ 1,\ 1) = (x,\ y,\ z) - \left(\frac{7}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{7}{3}\right);;$$

$$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right) = \left(x - \frac{7}{3},\ y + \frac{1}{3},\ z - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow \underline{x = \frac{11}{3}} \\ \\ y + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow \underline{y = -\frac{5}{3}} \\ \\ z - \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow \underline{z = \frac{11}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(\frac{11}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{11}{3}\right)}}.$$

****

2º) a) Discuta para que valores de α el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+(2a+1)y+(1-a)z=0 \\ 3ax+az=a \\ ax+ay+(1-a)z=0 \end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 3a & 0 & a \\ a & a & 1-a \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & 1-a & 0 \\ 3a & 0 & a & a \\ a & a & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 3a & 0 & a \\ a & a & 1-a \end{vmatrix}=3a^2(1-a)+a^2(2a+1)-a^3-3a(2a+1)(1-a)=0 \;;;$$

$$3a^2-3a^3+2a^3+a^2-a^3-3a(2a-2a^2+1-a)=0 \;;;\; 4a^2-2a^3-3a(-2a^2+a+1)=0 \;;;$$

$$4a^2-2a^3+6a^3-3a^2-3a=0 \;;;\; 4a^3+a^2-3a=0 \;;;\; a(4a^2+a-3)=0 \;;;\; a_1=0 \;;;\; 4a^2+a-3=0 \;;;$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-1\pm 7}{8} \Rightarrow \underline{a_2=-1} \;;;\; \underline{a_3=\frac{3}{4}}.$$

$$\underline{\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; determinado}}$$

$$Para\;\; a=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}.$$

$$Para\;\; a=-1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=2<n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{10}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$ A efectos de rango la matriz M' es equivalente a la matriz $M''=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M''\Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=30-9-30=$

$=-9\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ a=\frac{3}{4}\Rightarrow Rango\ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos en los casos de α = 0 y α = -1.

Para α = 0 el sistema es $\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ 0+0=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=\lambda \\ y=0,\ \forall\lambda\in R \\ z=0 \end{cases}}}.$$

Para α = -1 el sistema es $\left.\begin{array}{r} -x-y+2z=0 \\ -3x-z=-1 \\ -x-y+2z=0 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=0 \\ 3x+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $\underline{x=\lambda}$: $\left.\begin{array}{r} y-2z=-\lambda \\ 3x+z=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{z=1-3\lambda}\ \ ;;\ \ y=-\lambda+2z=-\lambda+2-6\lambda=\underline{2-7\lambda=y}$.

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-7\lambda,\ \forall\lambda\in R \\ z=1-3\lambda \end{cases}}}$$

****

3º) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$:

a) Calcule las asíntotas de la función f(x).

b) Calcule los extremos de la función f(x).

---

a)

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1 \Rightarrow \underline{\text{La recta y = 1 es asíntota horizontal.}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2+1=0 \;;;\; x\notin R \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas verticales.}}$$

Oblicuas: para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

<u>f(x) no tiene asíntotas oblicuas.</u>

b)

Una función tiene un extremo relativo para los valores que anulan la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \;;;\; 1-x^2=0 \;;;\; x^2=1 \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}}=f''(x).$$

$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0 \Rightarrow$$ Mínimo relativo para x = -1.

$$f(-1)=\frac{1-1+1}{1+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ A\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)}}.$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-4}{8}<0 \Rightarrow$$ Máximo relativo para x = 1.

$$f(1)=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máxmo:\ B\left(1,\ \frac{3}{2}\right)}}.$$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\cdot dx$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x^2-5x+6 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +5x^2 & -6x & & x+5 \\ \cline{1-3}
0 & +5x^2 & -6x & & \\
 & -5x^2 & +25x & -30 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & +19x & -30 &
\end{array}
$$

La división nos permita expresar la fracción de la integral de la forma siguiente:

$\frac{x^3}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}$, con lo que la integral sería:

$$I=\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\cdot dx=\int\left(x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\right)\cdot dx=\int(x+5)\cdot dx+\int\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\cdot dx=$$

$$=\underline{\frac{x^2}{2}+5x+I_1=I}\,. \qquad (*)$$

Para resolver la integral I_1 descomponemos factorialmente el denominador:

$$x^2-5x+6=0\ ;;\ x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=2}\\ \underline{x_2=3}\end{cases}\Rightarrow\ \underline{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)}\,.$$

$$I_1=\int\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\cdot dx=\int\frac{19x-30}{(x-2)(x-3)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)\cdot dx=\int\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}\cdot dx=$$

$$=\int\frac{(A+B)x-(3A+2B)}{x^2-5x+6}\cdot dx\Rightarrow\left.\begin{array}{r}A+B=19\\3A+2B=30\end{array}\right\}\ ;;\ \left.\begin{array}{r}-2A-2B=-38\\3A+2B=30\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{A=-8}\ ;;\ \underline{B=27}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_1=\int\left(\frac{-8}{x-2}+\frac{27}{x-3}\right)\cdot dx=\underline{-8L|x-2|+27L|x-3|=I_1}\,.$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*), queda finalmente:

$$\underline{\underline{I=\frac{x^2}{2}+5x-8L|x-2|+27L|x-3|+C}}$$

****