

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE BALEARES****SEPTIEMBRE – 2014**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el estudiante. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora científica, excepto aquellas que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

- 1º) a) Discutir para qué valores de b es compatible el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ x + by + (1+b)z = 1 \end{cases}$.
- b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de b es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)^2 - b - 2b + (1+b) + b^2 - 2(1+b) = 1 + 2b + b^2 - 3b - (1+b) + b^2 =$$

$$= 1 - b + 2b^2 - 1 - b = 2b^2 - 2b = 2b(b-1) = 0 \Rightarrow \underline{b_1 = 0}, \underline{b_2 = 1}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$$

$$\text{Para } b=0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$$

Para $b=0 \Rightarrow \text{Rango } M = 2$; ; $\text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$.

$$\text{Para } b=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 2}$$

Para $b=1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$.

b)

Resolvemos para $b = 1$ en cuyo caso el sistema es $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, equivalente al

sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

$$\text{Haciendo } \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y=2+\lambda \\ x+y=1-2\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x+2y=2+\lambda \\ -x-y=-1+2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{y=1+3\lambda} \ ; \ ; \ x=1-2\lambda-y=$$

$$= 1-2\lambda-1-3\lambda = \underline{-5\lambda = x}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 1+3\lambda, \forall \lambda \in R. \\ z = \lambda \end{cases}$$

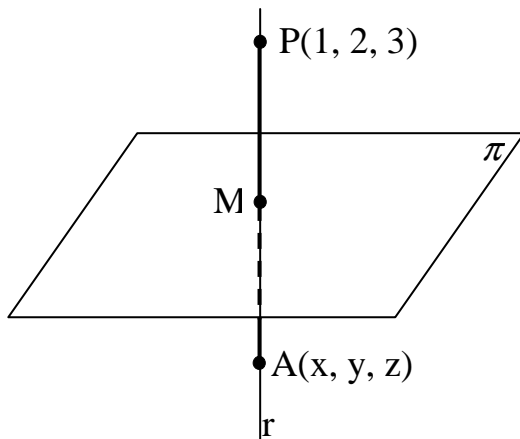
2º) Calcule la ecuación general del plano que pasa por los puntos A, B y C, siendo:

A: el simétrico del punto P(1, 2, 3) respecto del plano $x = z$.

B: la proyección ortogonal del punto Q(2, 1, 3) sobre el plano $z = 0$.

C: el origen de coordenadas.

El plano $x = z$ tiene como vector director a $\vec{u} = (1, 0, -1)$.



La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano $x = z$ tiene como vector director al vector normal del plano; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} .$$

El punto M, intersección del plano $x = z$ con la recta r , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$r \equiv \begin{cases} x = z \\ x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 3 - \lambda \\ 2\lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{M(2, 2, 2)} .$$

Para que A sea el punto simétrico de P con respecto al plano $x = z$, tiene que cumplirse que:

$$\vec{PM} = \vec{MA} \Rightarrow M - P = A - M \quad ; ; \quad (2, 2, 2) - (1, 2, 3) = (x, y, z) - (2, 2, 2) ; ;$$

$$(1, 0, -1) = (x - 2, y - 2, z - 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow \underline{x = 3} \\ y - 2 = 0 \rightarrow \underline{y = 2} \\ z - 2 = -1 \rightarrow \underline{z = 1} \end{cases} \Rightarrow \underline{A(3, 2, 1)} .$$

El plano $z = 0$ tiene como vector director a $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

La recta s que pasa por el punto Q(2, 1, 3) y es perpendicular al plano $z = 0$ tiene como vector director al vector normal del plano; su expresión por unas ecuaciones pa-

ramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 + \lambda \end{cases} .$

El punto B es la intersección de la recta r y el plano $z = 0$, que es B(2, 1, 0).

Los puntos A(3, 2, 1), B(2, 1, 0) y C(0, 0, 0) determinan los vectores $\overrightarrow{CA} = (3, 2, 1)$ y $\overrightarrow{CB} = (2, 1, 0)$.

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(C; \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 2y + 3z - 4z - x = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 2y + z = 0.}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Sea la función $f(x) = e^x \cdot \cos x$ definida en el intervalo $(0, 2\pi)$.

a) Calcula y determina los extremos de $f(x)$.

b) Calcula y determina los puntos de inflexión de $f(x)$.

a)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x (\cos x - \sin x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (\cos x - \sin x) = 0 \quad ; ; \quad \cos x - \sin x = 0 \quad ; ; \quad \sin x = \cos x \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = e^x (\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = \underline{-2e^x \sin x}.$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -2e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo para } x = \frac{\pi}{4}}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo: } P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}\right)}}.$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} = -2e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x = \frac{5\pi}{4}}.$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \cos \frac{5\pi}{4} = -e^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } Q\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}}\right)}}.$$

b)

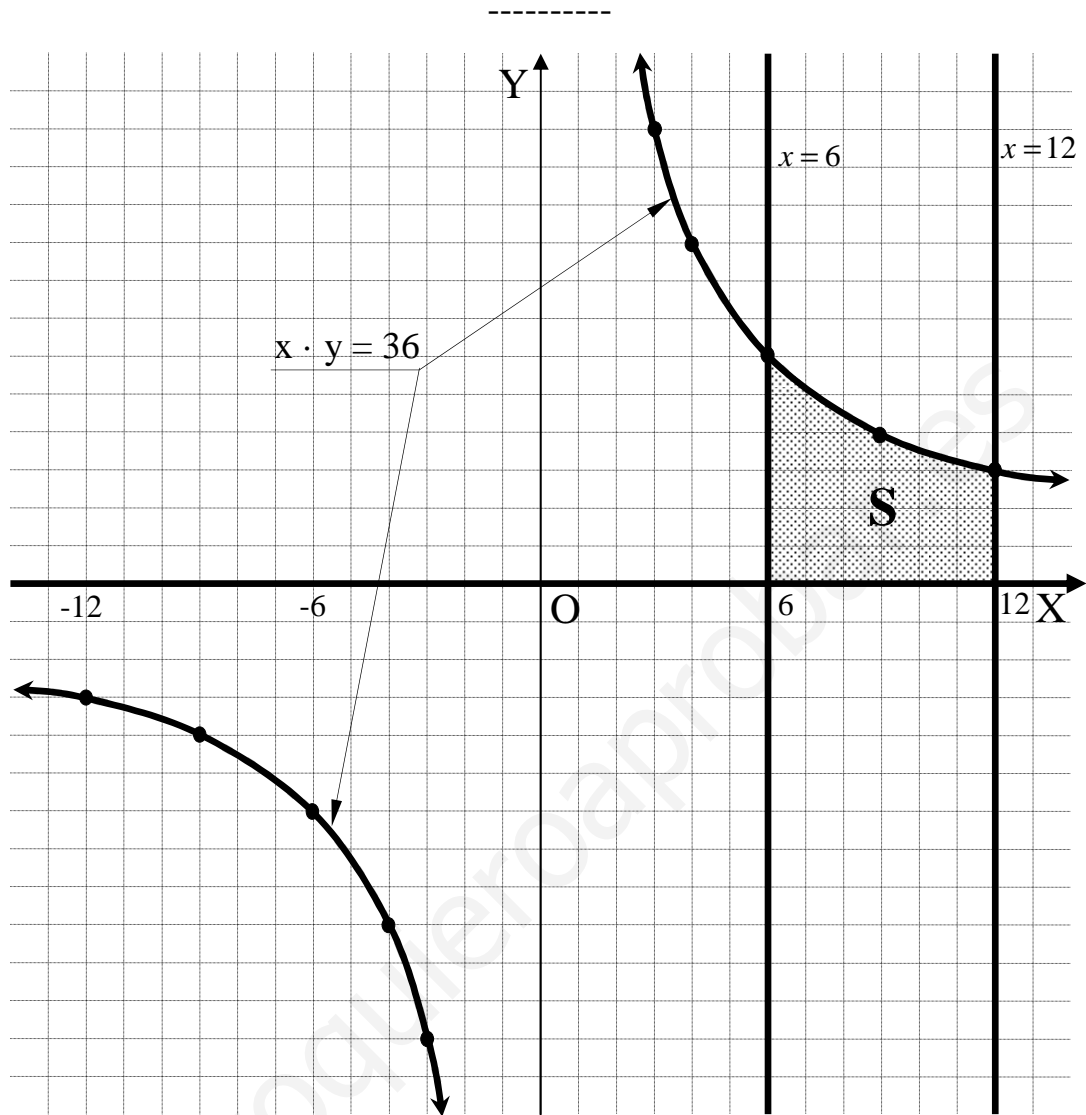
La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2e^x \sin x = 0 \quad ; ; \quad \sin x = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0}, \quad \underline{x_2 = \pi}.$$

$$f(0) = e^0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P. I. \Rightarrow C(0, 1)}}.$$

$$f(\pi) = e^\pi \cdot \cos \pi = e^\pi \cdot (-1) = -e^\pi \Rightarrow \underline{\underline{P. I. \Rightarrow D(\pi, -e^\pi)}}.$$

4º) Haga un dibujo del recinto limitado por la curva $x \cdot y = 36$, el eje OX y las rectas verticales $x = 6$ y $x = 12$. Calcule es área de este recinto.



La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura.

La curva se puede expresar en forma de función así: $y = f(x) = \frac{36}{x}$.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_6^{12} \frac{36}{x} \cdot dx = 36 \cdot \int_6^{12} \frac{1}{x} \cdot dx = 36 \cdot [Lx]_6^{12} = 36 \cdot (L12 - L6) = 36 \cdot L\frac{12}{6} = \underline{36 \cdot L2}.$$

$$\underline{\underline{S = 36L2 u^2 \cong 24'95 u^2 .}}$$

OPCIÓN B

- 1º) a) Discutir para que valores de α el sistema $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$ es compatible.
b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a + 4 + 4a + 2 = 6a + 6 = 6(a + 1) = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

Para $a \neq -1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = -C_2\} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2 + 1) = -6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$$

Para $a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M = 2$; ; $\text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

Resolvemos para $\alpha \neq -1$, en cuyo caso el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = y} \Rightarrow \begin{cases} ax + x + 2z = 1 \\ ax + x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = 0} \Rightarrow (a + 1)x = 1 ; ; \underline{\underline{x = y = \frac{1}{a + 1}}}.$$

2º) Determine los puntos P situados a una distancia de 5 unidades del origen de coordenadas y que pertenecen a la recta r que pasa por los puntos A(1, 2, 5) y B(6, 5, 6).

Los puntos A y B determinan el vector $\vec{v} = \overline{AB} = B - A = (5, 3, 1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$ y un

punto genérico de r es $P(1 + 5\lambda, 2 + 3\lambda, 5 + \lambda)$.

Por condición del problema es $\overline{OP} = 5 \Rightarrow \sqrt{(1 + 5\lambda)^2 + (2 + 3\lambda)^2 + (5 + \lambda)^2} = 5$;;

$$1 + 10\lambda + 25\lambda^2 + 4 + 12\lambda + 9\lambda^2 + 25 + 10\lambda + \lambda^2 = 25 \quad ;; \quad 35\lambda^2 + 32\lambda + 5 = 0 \quad ;; \quad \lambda = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 700}}{70} =$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 700}}{70} = \frac{-32 \pm \sqrt{324}}{70} = \frac{-32 \pm 18}{70} = \frac{-16 \pm 9}{35} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-25}{35} = -\frac{5}{7}, \quad \lambda_2 = \frac{-7}{35} = -\frac{1}{5}.$$

$$P_1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{25}{7} = -\frac{18}{7} \\ y = 2 - \frac{15}{7} = -\frac{1}{7} \\ z = 5 - \frac{5}{7} = \frac{30}{7} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{30}{7}\right)}}$$

$$P_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \\ z = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(0, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)}}$$

3°) a) Calcule el valor de α para que la función $f(x) = \begin{cases} L(x-1)^2 + a & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \\ bx^2 - 6x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$ y derivable en el intervalo $(\frac{3}{2}, 4)$.

b) Para los valores de α y b determinados en el apartado anterior, calcula los puntos del intervalo $(1, 4)$ donde la pendiente de la recta tangente es 3.

a)

La función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , excepto para el valor $x = 2$ cuya continuidad depende de los valores α y b que debemos determinar para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando existen sus límites por la izquierda y por la derecha y, además, son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [L(x-1)^2 + a] = f(2) = a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (bx^2 - 6x) = \underline{4b-12} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = 4b - 12}. \quad (1)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \\ 2bx - 6 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(2) = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \\ 4b - 6 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 4b - 6 = 2 \ ; \ ; \ 4b = 8 \ ; \ ; \ \underline{\underline{b = 2}}.$$

Sustituyendo en (1) el valor de b : $a = 4 \cdot 2 - 12 = 8 - 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = -4}}$.

b)

Para los valores de α y b obtenidos la función es $f(x) = \begin{cases} L(x-1)^2 - 4 & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \\ 2x^2 - 6x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

En el intervalo $(1, 4)$ la función puede expresarse por partes de la forma siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} L(x-1)^2 - 4 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2x^2 - 6x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}.$$

Sabiendo que la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4x - 6 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}. \text{ Los puntos buscados son los siguientes:}$$

$$\frac{2}{x-1} = 3 \quad ; \quad 2 = 3x - 3 \quad ; \quad 3x = 5 \quad ; \quad x = \frac{5}{3} \in (1, 2).$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = L\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 - 4 = L\frac{4}{9} - 4 = L4 - L9 - 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(\frac{5}{3}, L4 - L9 - 4\right)}}.$$

$$4x - 6 = 3 \quad ; \quad 4x = 9 \quad ; \quad x = \frac{9}{4} \in (2, 4).$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 6 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{8} - \frac{27}{2} = \frac{81 - 108}{8} = -\frac{27}{8} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(\frac{9}{4}, -\frac{27}{8}\right)}}.$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{x}{(x-1)^2} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{x}{(x-1)^2} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{cases} \Rightarrow I = \int \frac{t+1}{t^2} \cdot dt = \int \frac{1}{t} \cdot dt + \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = Lt + \int t^{-2} \cdot dt =$$

$$= Lt + \frac{t^{-1}}{-1} + C = Lt - \frac{1}{t} + C = \underline{L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C}.$$

$$\underline{\underline{I = \int \frac{x}{(x-1)^2} \cdot dx = L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C}}$$

www.yoquieroaprobar.es