PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el estudiante. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora científica, excepto aquellas que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de k es compatible el sistema $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-y+kz=5 \end{cases}$.

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en que sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & k \end{vmatrix}=-3k+2+6-9+1-4k=-7k=0 \Rightarrow \underline{k=0}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k\neq 0 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ determinado}}$$

$$Para\ \ k=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=-15-16-6+72-1-20=72-58=14\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ \ k=0 \Rightarrow Rango\ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}$$

<u>El sistema dado es compatible para k ≠ 0</u>.

b)

Para la resolución del sistema se utiliza el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-y+kz=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2-2F_1 \\ F_3 \to F_3-3F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ -7y+3z=-17 \\ -7y+(k+3)z=-19 \end{array}\right\} \Rightarrow \{F_3 \to F_3-F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ -7y+3z=-17 \\ kz=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{z=-\frac{2}{k}}}\ ;;\ -7y-\frac{6}{k}=-17\ ;;\ 7y=17-\frac{6}{k}=\frac{17k-6}{k} \Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{17k-6}{7k}}}\ ;;$$

$$x=8-2y+z=8-\frac{34k-12}{7k}-\frac{2}{k}=\frac{56k+34k-12-14}{7k}=\underline{\underline{\frac{90k-26}{7k}}}=x\,.$$

****

2º) Determina el punto (o los puntos) de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z+3=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}}$.

Un punto genérico de r es $\underline{P(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ 2\lambda)}$.

Un punto y dos vectores directores del plano π₂ son A(-3, 0, -6), $\vec{u}=(1,\ -1,\ 0)$ y $\vec{v}=(0,\ 1,\ 1)$.

La expresión general de π₂ es la siguiente: $\pi_2(A;\ \vec{u},\ \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;;

$-(x+3)+(z+6)-y=0$;; $-x-3+z+6-y=0$;; $-x-y+z+3=0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x+y-z-3=0}$.

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ y que $d(P,\ \pi_1) = d(P,\ \pi_2)$:

$$\frac{|(1+2\lambda)+(-1+\lambda)+(2\lambda)+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-(2\lambda)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \;;;$$

$$\frac{|1+2\lambda-1+\lambda+2\lambda+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+2\lambda-1+\lambda-2\lambda-3|}{\sqrt{1+1+1}} \;;;\; |5\lambda+3| = |\lambda-3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\lambda+3=\lambda-3 \;;;\; 4\lambda=-6 \;;;\; \underline{\lambda_1=-\frac{3}{2}} \\ 5\lambda+3=-\lambda+3 \;;;\; 6\lambda=0 \;;;\; \underline{\lambda_2=0} \end{cases}.$$

$$P(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ 2\lambda) \Rightarrow \begin{cases} P_1\left(1-3,\ -1-\frac{3}{2},\ -3\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(-2,\ -\frac{5}{2},\ -3\right)}} \\ \underline{\underline{P_2(1,\ -1,\ 0)}} \end{cases}.$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \ -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & si \ -1 < x \le 0 \end{cases}$.

a) Pruebe que f(x) es continua en el intervalo $[-2,\ 0]$ y derivable en el intervalo $(-2,\ 0)$.

b) Estudie si la función es creciente o decreciente en los intervalos (-2, -1) y (-1, 0).

----

a)

La función f(x) es continua en su dominio, excepto para el valor x = -1 cuya continuidad es dudosa; para comprobar que la función es continua en el intervalo [-2, 0] es suficiente con comprobar que lo es para x = -1.

Para que f(x) sea continua para x = -1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to -1^-}{lím} f(x) = \underset{x \to -1}{lím} \dfrac{1}{x} = \underline{-1} = f(-1) \\ \underset{x \to -1^+}{lím} f(x) = \underset{x \to -1}{lím} \dfrac{x^2-3}{2} = \dfrac{(-1)^2-3}{2} = \dfrac{1-3}{2} = \underline{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{x \to -1^-}{lím} f(x) = f(-1) = \underset{x \to -1^+}{lím} f(x).$$

<u>La función es continua en [-2, 0], como teníamos que probar.</u>

La función f(x) es derivable en su dominio, excepto para x = -1 cuya derivabilidad es dudosa. Para que la función sea derivable en el intervalo (-2, 0) es suficiente con probar que es derivable para x = -1.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & si \ -2 \le x \le -1 \\ x & si \ -1 < x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(-1^-) = -\dfrac{1}{(-1)^2} = \underline{-1} \\ f'(-1^+) = \underline{-1} \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(-1^-) = f'(-1^+)}.$$

<u>La función es derivable en (-2, 0), como teníamos que probar.</u>

b)

Una función es creciente o decreciente en un intervalo cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en todos los puntos del intervalo.

En el intervalo (-2, -1) la función es $f(x)=\frac{1}{x}$.

$$\underline{f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\ \forall x\in(-2,\ -1)}.$$

<u>La función f(x) es monótona decreciente en el intervalo (-2, -1)</u>.

En el intervalo (-1, 0) la función es $f(x)=\frac{x^2-3}{2}$.

$$\underline{f'(x)=\frac{2x}{2}=x<0,\ \forall x\in(-1,\ 0)}.$$

<u>La función f(x) es monótona decreciente en el intervalo (-1, 0)</u>.

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{x^3}{x^2+1}\cdot dx$.

$$\begin{array}{r|c|l} x^3 & -x & x^2+1 \\ \hline -x^3 & & x \\ \hline 0 & -x & \end{array}$$

$$I=\int \frac{x^3}{x^2+1}\cdot dx=\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot dx=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x}{x^2+1}\cdot dx=\underline{x-I_1=I}. \qquad (*)$$

$$I_1=\int\frac{x}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2x\cdot dx=dt \\ x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\cdot Lt+C=\underline{\frac{1}{2}\cdot L\left(x^2+1\right)+C}.$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*), queda finalmente:

$$\underline{\underline{I=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}L\left(x^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\left[x^2+L\left(x^2+1\right)\right]+C}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discutir para que valores de m el sistema $\begin{cases} y+z=1 \\ (m-1)x+3y+z=2 \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que es compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix}=(m-1)^2+1-3+m-1=m^2-2m+1-3+m=m^2-m-2=0 \;;;$$

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow \underline{m_1=-1} \;;;\; \underline{m_2=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} m\neq-1 \\ m\neq2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado}}$$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=4+2-3=3\neq0 \Rightarrow \underline{Rango\ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ m=-1 \Rightarrow Rango\ A=2 \;;;\; Rango\ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ m=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1+C_3=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ m=2 \Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

b)

Resolvemos en primer lugar en el caso de compatible determinado.

$\begin{cases} y+z=1 \\ (m-1)x+3y+z=2 \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$. Sumando la tercera ecuación a las dos primeras resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x+my=1 \\ mx+(m+2)y=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -mx-m^2y=-m \\ mx+(m+2)y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow (m+2-m^2)y=2-m \;;;\; (m^2-m-2)y=m-2 \;;;$$

$$m^2-m-2=(m+1)(m-2) \Rightarrow Apartado\ a\ ) \Rightarrow y=\frac{m-2}{(m+1)(m-2)}=\underline{\underline{\frac{1}{m+1}=y}} \;;;\; x=1-my=1-\frac{m}{m+1}=$$

$$=\frac{m+1-m}{m+1}=\underline{\underline{\frac{1}{m+1}=x}} \;;;\; z=1-y=1-\frac{1}{m+1}=\frac{1-m-1}{m+1}=\underline{\underline{\frac{-m}{m+1}=z}}.$$

Resolvemos ahora cuando el sistema es compatible indeterminado.

Para m = 2 el sistema es $\begin{cases} y+z=1 \\ x+3y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$. Despreciando, por ejemplo, la segunda ecuación y haciendo $\underline{z=\lambda}$:

$\underline{y=1-\lambda} \;;;\; x=-y+z=-1+\lambda+\lambda=\underline{-1+2\lambda=x}$.

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}, \ \forall \lambda \in R}}.$$

****

2º) Encontrar la ecuación continua de la recta r paralela al plano $\pi \equiv 2x-2y+5z=3$ y perpendicular a la recta $s \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ en su punto P(-1, 2, 0).

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x-2y+5z=3$ es $\overrightarrow{n}=(2,\ -2,\ 5)$ y un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s}=(2,\ -1,\ 3)$.

El vector director de la recta r pedida tiene que ser perpendicular al vector normal del plano y al vector director de la recta s.

El producto vectorial de dos vectores es otro vector que es perpendicular a los dos vectores que se multiplican, por lo cual, el vector director de r es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{v_s}$.

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-6i+10j-2k+4k+5i-6j=-i+4j+2k=\underline{(-1,\ 4,\ 2)}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es $\underline{\underline{r \equiv \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{2}}}$.

****

3º) a) Calcule el valor de α para que la función $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & si\ \ x\le 0\\ x^2+ax & si\ \ x>0\end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\ 1\right]$.

b) Considere el valor de α determinado en el apartado a), encuentre el valor $c\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 1\right)$ tal que $f'(c)=0$.

----

a)

El teorema de Rolle dice que "si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que f(α) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que f'(x) = 0".

La función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, excepto par el valor x = 0, cuya continuidad y derivabilidad debemos conseguir hallando el correspondiente valor del parámetro α.

Para que f(x) sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x\to 0^-}{lím} f(x)=\underset{x\to 0}{lím}(1-\cos x)=1-1=\underline{0}=f(0)\\ \underset{x\to 0^+}{lím} f(x)=\underset{x\to 0}{lím}(x^2+ax)=\underline{0}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ <u>f(x) es continua para x = 0 para cualquier valor real de α</u>.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases}sen\ x & si\ \ x\le 0\\ 2x+a & si\ \ x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}f'(0^-)=sen\ 0=\underline{0}\\ f'(0^+)=\underline{a}\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=0}}.$$

<u>La función verifica el teorema de Rolle para α = 0.</u>

b)

Para α = 0 la función es $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & si\ \ x\le 0\\ x^2 & si\ \ x>0\end{cases}$.

Aplicando el teorema de Rolle a f(x) en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\ 1\right]$:

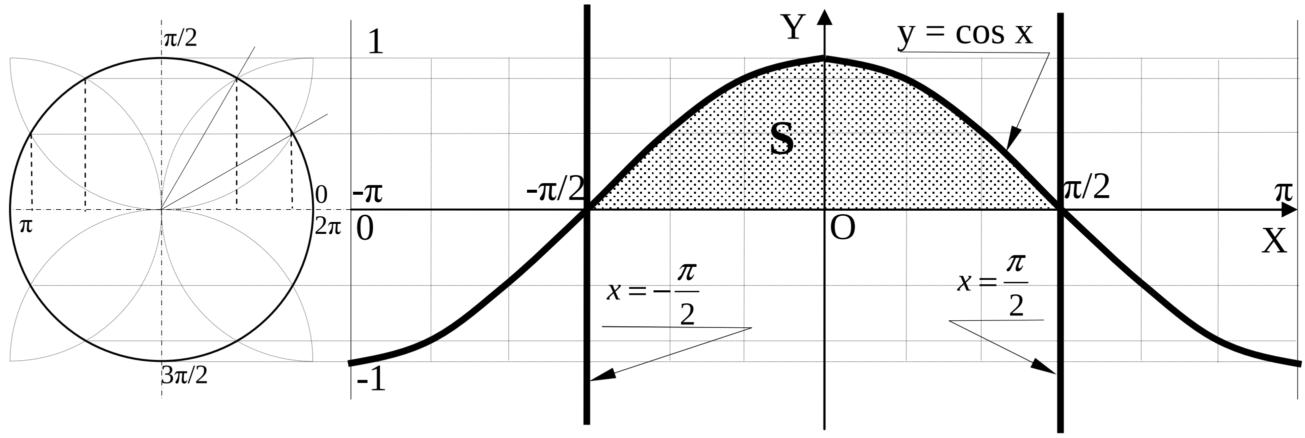
$$f(x)=\begin{cases}1-\cos x & si\ \ x\le 0\\ x^2 & si\ \ x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ \left.\begin{cases}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-0=\underline{1}\\ \\ f(1)=1^2=\underline{1}\end{cases}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f(-1)}.$$

$$f'(x)=\begin{cases} sen\ x & si \quad x\le 0 \\ 2x & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(c)=0 \Rightarrow sen\ c = 2c = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c=0}}.$$

****

4º) Haga un dibujo del recinto limitado por la curva $y(x)=\cos x$, el eje OX y las rectas verticales $x=-\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{\pi}{2}$. Calcule el área de este recinto.

Como puede observarse, en el intervalo comprendido por las dos rectas verticales



$x=-\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{\pi}{2}$, las ordenadas de la curva y = cos x son positivas y, además, la curva es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot dx = 2[sen\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\left(sen\ \frac{\pi}{2}-sen\ 0\right) = 2\cdot(1-0) = \underline{\underline{2\ u^2}}\ .$$

****