PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para qué valores de m el sistema $\left.\begin{matrix} mx+2y+z=0 \\ 4x+2my+mz=0 \\ 2x+(2m-2)y+z=0 \end{matrix}\right\}$ tiene soluciones distintas de la trivial.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

---

a)

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 4 & 2m & m \\ 2 & 2m-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 4 & 2m & m \\ 2 & 2m-2 & 1 \end{vmatrix}=2m^2+4m+4(2m-2)-4m-8-m^2(2m-2)=$$

$$=2m^2+8m-8-8-2m^3+2m^2=-2m^3+4m^2+8m-16=$$

$$=-2(m^3-2m^2-4m+8)=0\Rightarrow m^3-2m^2-4m+8=0.$$

Resolviendo por Ruffini se obtienen las soluciones $m_1=m_2=2, m_3=-2$.

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ m=2\ y\ para\ m=-2.}$

b)

Para m = 2 el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} 2x+2y+z=0 \\ 4x+4y+2z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{matrix}\right\}$, equivalente a la ecuación:

$2x+2y+z=0$, cuyo rango es 1, por lo cual el sistema tiene 3 – 1 = 2 grados de libertad, o sea, que depende de dos parámetros. Las infinitas soluciones son:

$$\underline{(a,\beta,-2a-2\beta)}.$$

Para m = -2 el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} -2x+2y+z=0 \\ 4x-4y-2z=0 \\ 2x-6y+z=0 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema:

$\left.\begin{matrix} 2x-2y-z=0 \\ 2x-6y+z=0 \end{matrix}\right\}$, cuyo rango es 2, por lo cual el sistema tiene 3 – 2 = 1 grado de libertad, o sea, que depende de un parámetro. Las infinitas soluciones son:

$$4x-8y=0; x-2y=0; x=2y. \quad z=4y-2y=2y.$$

$$\underline{(2\lambda,\lambda,2\lambda)}.$$

****

2º) Determine el valor de m para que los puntos A (1, 2, 0), B (0, 3, -1), C (1, 0, 1) y D (-1, 2, m) sean coplanarios y calcula la ecuación general del plano que los contiene.

Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 3, -1) - (1, 2, 0)] = (-1, 1, -1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1, 0, 1) - (1, 2, 0)] = (0, -2, 1).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(-1, 2, m) - (1, 2, 0)] = (-2, 0, m).$$

Tres vectores son linealmente dependiente cuando el rango de la matriz que determinan es menor de 3, o sea: cuando su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{vmatrix} = 0; 2m - 2 + 4 = 0; 2m + 2 = 0; m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1.$$

$$\underline{Los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ son\ coplanarios\ para\ m = -1.}$$

Considerando los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1), \overrightarrow{AC} = (0, -2, 1)$ y el punto $A(1, 2, 0)$:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 1) + 2z - 2(x - 1) + (y - 2) = 0; -x + 1 + 2z + y - 2 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x - y - 2z + 1 = 0.}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, determine el valor de c que verifica que la pendiente de la recta tangente de f(x) en x = c es mínima y calcula la correspondiente recta tangente de f(x) en x = c.

La tangente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$

La condición para que la pendiente sea mínima es que se anule su derivada, o sea, que se anule la segunda derivada:

$f''(x) = 6x - 6 = 0; x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = 1}.$

$$\underline{La\ tangente\ es\ mínima\ en\ el\ puntu\ de\ abscisa\ c = 1}.$$

El punto de tangencia es:

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 2 + 1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{P(1,1)}.$

El valor de la pendiente es: $m = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 3 - 6 + 2 = \mathbf{-1}.$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 1) = -x + 1)$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv x + y - 2 = 0}.$$

****

4º) Haga un dibujo aproximado de las curvas $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$ e indique los puntos en que se cortan. Calcule el área del recinto limitado por las curvas dadas.

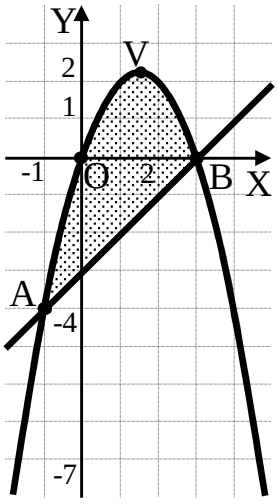
Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$3x - x^2 = x - 3 \;;;\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;;;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} =$$

$$= 1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,-4)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3,0)} \end{cases}.$$

El vértice de la parábola $y = 3x - x^2$ es: $y' = 3 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$.

$$y_{\left(\frac{3}{2}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \boldsymbol{V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}.$$



La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la curva, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(-1, 3)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

$$S = \int_{-1}^{3} [(3x - x^2) - (x - 3)] \cdot dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{3} = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} = \underline{\frac{32}{3}\ u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula la matriz X tal que $B \cdot X - B^2 = A \cdot B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$B \cdot X - B^2 = A \cdot B;\ \ B \cdot X = A \cdot B + B^2 = (A + B) \cdot B = M.$

Multiplicando los dos términos por la izquierda por B^{-1}:

$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot M;\ \ I \cdot X = B^{-1} \cdot M \ \Rightarrow\ \underline{X = B^{-1} \cdot M}.$

$$M = (A + B) \cdot B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

$$X = B^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Calcule el punto simétrico del punto A (-3, 1, -7) respecto a la recta r de ecuación $r \equiv x + 1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

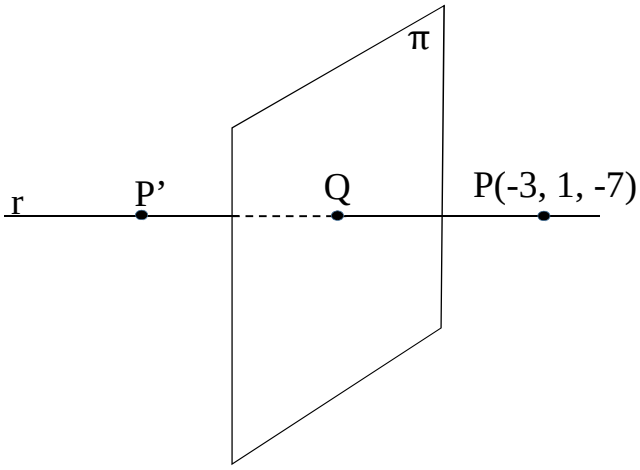
El vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto A es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(-3, 1, -7) \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + D = 0;$$

$-3 + 2 - 14 + D = 0;\ -15 + D = 0 \Rightarrow D = 15 \Rightarrow\ \boldsymbol{\pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0}$.



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

El punto Q intersección de r y π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + 15 = 0;$$

$-1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda + 15 = 0;\ \ 9\lambda + 18 = 0;\ \ \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$

$$\left.\begin{matrix} x = -1 + \lambda \rightarrow x = -1 - 2 = -3 \\ y = 3 + 2\lambda \rightarrow y = 3 - 4 = -1 \\ z = -1 + 2\lambda \rightarrow -1 - 4 = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Q(-3, -1, -5)}.$$

Para que P' sea el opuesto de P con respecto al plano π tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \ \Rightarrow\ [Q - P] = [P' - Q];$$

$[(-3,-1,-5)-(-3,1,-7)]=[(x,y,z)-(-3,-1,-5)];$

$$(0,-2,2)=(x+3,y+1,z+5)\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x+3=0\to x=-3\\ y+1=-2\to y=-3\\ z+5=2\to z=-3\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow\ P'(-3,-3,-3).}$$

****

3º) Demuestre que existe un único valor x > 0 solución de la ecuación $x^2 - e^{-x} = 0$.

Demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^2 - e^{-x}$ tiene una solución única y positiva.

La función $f(x) = g(x) + h(x) = x^2 - e^{-x} = x^2 - \frac{1}{e^x}$, que es continua y derivable en su dominio, que es R, por serlo $g(x) = x^2$ y $h(x) = e^{-x}$ y si dos funciones son continuas y derivables en R también lo es su función suma algebraica.

A la función f(x) le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[0, 2]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^2 - \frac{1}{e^0} = 0 - \frac{1}{1} = -1 < 0 \\ f(2) = 2^2 - \frac{1}{e^2} = \frac{4e^2 - 1}{e^2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \boldsymbol{c} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}] \Rightarrow \boldsymbol{f(c) = 0}.$$

Ya se ha probado que la función tiene una raíz x > 0; ahora se debe demostrar que este valor es único.

Teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de f(x) y que:

$f'(x) = 2x - \frac{-e^x}{(e^x)^2} = 2x + \frac{1}{e^x} > 0, \forall x \in R$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que tenga más de una solución.

Queda demostrado lo pedido.

****

4º) Calcule la integral indefinida siguiente: $I = \int \frac{x-2}{x^2+x} \cdot dx$.

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x^2+x} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B=1 \\ \boldsymbol{A=-2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{B=3}.$$

$$I = \int \frac{x-2}{x^2+x} \cdot dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+1}\right) \cdot dx = -2L|x| + 3L|x+1| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x-2}{x^2+x} \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot L\left|1+\frac{1}{x}\right| + C.}$$

****