PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta para que valores de a el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix}.$$

Considerando que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-3+6+6-1+3=10 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M=3}$.

$$Rang\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} \Rightarrow Sumando\ C_2\ a\ todas\ las\ demás \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 2 & a^2+1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a^2+1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow$$

$$= -\begin{vmatrix} a+1 & 2 & a^2+1 \\ a+3 & 0 & a^2+1 \\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+3 & a^2+1 \\ 5 & 3a-1 \end{vmatrix} = 2[(a+3)(3a-1) - 5a^2 - 5] =$$

$$= 2(3a^2 - a + 9a - 3 - 5a^2 - 5) = 2(-2a^2 + 8a - 8) = -4(a^2 - 4a + 4) =$$

$$= -4(a-2)^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a = 2}.$$

$$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = 3, Rang\ M' = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 6 \end{array}\right\}$. Despreciando la última ecuación (que es combinación de las demás: su suma) y resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4-1+1+1+4+1}{2-1+3+3+2+1} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-2+1+12-3-2+4}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-2-4+3+12+2-1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = 1, y = 1, z = 1.}$$

****

2º) Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$ y, en caso de que se corten, calcular el punto de corte.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(2,3,0)\ y\ \overrightarrow{v_r}=(-3,5,1)$. Recta s: $B(1,0,5)\ y\ \overrightarrow{v_s}=(-1,2,0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto supone que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso se determina un vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto A de r y como extremo el punto B de s; es el siguiente:

$$\vec{w}=\overrightarrow{AB}=[A-B]=[(2,3,0)-(1,0,5)]=(1,3,-5).$$

Según que los vectores $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\ y\ \vec{w}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando es cero el determinante de la matriz que forman:

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 30-3-2-25=0.$$

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} < 3 \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}.$$

$b)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x=2-3\mu \\ y=3+5\mu \\ z=\mu \end{cases}.$

El punto P de corte es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2-3\mu=1-t \\ 3+5\mu=2t \\ \mu=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-3\cdot 5=-13 \\ y=3+5\cdot 5=28 \\ z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P(-13,28,5)}.$$

****

3º) Determinar los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1, 0)$, tenga un máximo relativo en x = -1 y un mínimo relativo para x = 0.

Por contener $f(x)$ al punto P: $f(1) = 0$:

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{a + b + c = -1}$. (1)

Por tener $f(x)$ un máximo relativo para x = -1: $f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$f'(-1) = 0 \ \Rightarrow \ f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{-2a + b = -3}$. (2)

Por tener $f(x)$ un mínimo relativo para x = 0: $f'(0) = 0$:

$f'(0) = 0 \ \Rightarrow \ f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow \ \underline{b = 0}$.

Sustituyendo en (2) el valor de b obtenido: $-2a = -3 \ \Rightarrow \ \underline{a = \frac{3}{2}}$.

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$\frac{3}{2} + 0 + c = -1; \ \ c = -1 - \frac{3}{2} \ \ \Rightarrow \ \ \underline{c = -\frac{5}{2}}$.

****

4º) Calcula la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+3=t \rightarrow x=t-3 \\ dx=dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{2(t-3)+5}{t^3}dt=\int \frac{2t-6+5}{t^3}\cdot dt=$$

$$=\int \frac{2t-1}{t^3}\cdot dt=2\cdot\int t^{-2}\cdot dt-\int t^{-3}\cdot dt=2\cdot\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{2}{t}+\frac{1}{2t^2}+C=$$

$$=-\frac{2}{x+3}+\frac{1}{2\cdot(x+3)^2}+C=\frac{-4\cdot(x+3)+1}{2\cdot(x+3)^2}+C=\frac{-4x-12+1}{2\cdot(x+3)^2}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\cdot dx=-\frac{4x+11}{2\cdot(x+3)^2}+C.}$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Demostrar que la ecuación matricial $A \cdot B - A = C$ no tiene solución, en donde $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (Indicación: tomad determinantes).

$b)$ Resolver la ecuación matricial anterior pero con $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$a)$

$$A \cdot B - A = C;\ \ A \cdot (B - I) = C \Rightarrow M = B - I \Rightarrow A \cdot M = C.$$

Multiplicando por la derecha los dos términos por M^{-1}:

$$A \cdot M \cdot M^{-1} = C \cdot M^{-1};\ \ A \cdot I = C \cdot M^{-1} \ \ \Rightarrow \ \ \boldsymbol{A = C \cdot M^{-1}}.$$

$$M = B - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \ \Rightarrow \ \ \boldsymbol{M\ no\ es\ invertible}.$$

<u>$Queda\ demostrado\ que\ la\ ecuación\ A \cdot B - A = C$ no tiene solución.</u>

$b)$

$$M = B - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \qquad M^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \qquad Adj.\ de\ M^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \boldsymbol{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$A = C \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & -1-3 \\ -3+6 & -3-6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Encontrar la recta r que pasa por el punto $A(1,0,2)$ y es paralela a los planos siguientes: $\pi_1 \equiv x-2y+3z+1=0$ y $\pi_2 \equiv 2x-3y+z+6=0$.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1}=(1,-2,3)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,-3,1)$, respectivamente.

Los planos dados son secantes por ser linealmente independientes sus vectores normales, por lo que determinan la recta s$\equiv \begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x-3y+z+6=0 \end{cases}$, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{n_1}=(1,-2,3)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,-3,1)$:

$$\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-2i+6j-3k+4k+9i-j=7i+5j+k \;\;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \;\; \boldsymbol{\overrightarrow{v_r}=(7,5,1)}$.

La expresión de la recta r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1}}.$$

****

3º) a) Demostrar que x = 0 es la única raíz de la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.

b) Demostrar que x = 0 es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

----

a)

Considerando la función $f(x) = 5x^9 + 3x^5 + 7x$ que, por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Demostrar que la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$ tiene como raíz única x = 0 es equivalente a demostrar que la función $f(x) = 5x^9 + 3x^5 + 7x$ tiene como única raíz x = 0. Si tuviera otra raíz $x = \beta$, tal que $f(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[0, \beta]$:

$$f'(x) = 45x^4 + 15x^4 + 7 \Rightarrow f'(c) = 45c^4 + 15c^4 + 7 > 0, \forall c \in R.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ x = 0\ es\ la\ raíz\ única\ de\ 5x^9 + 3x^5 + 7x = 0.}$$

Otra forma de demostrar que la ecuación tiene una raíz única es teniendo en cuenta el dominio y la continuidad de $f(x)$ y que es monótona creciente en R por ser $f'(x) = 45x^4 + 15x^4 + 7 > 0, \forall x \in R$.

b)

Se sigue un proceso similar al apartado anterior.

Considerando la función $g(x) = e^x - x - 1$ que es continua y derivable en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

Demostrar que la ecuación $e^x = x + 1$ tiene como raíz única x = 0 es equivalente a demostrar que la función $g(x) = e^x - x - 1$ tiene como única raíz x = 0. Si tuviera otra raíz $x = \beta$, tal que $g(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $g(x)$ en el intervalo $[0, \beta]$, con $\beta > 0$:

$$g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(c) = e^c - 1 = 0;\ \ e^c = 1\ \Rightarrow c = 0.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ x = 0\ es\ la\ raíz\ única\ de\ e^x = x + 1.}$$

Otra forma de resolver el apartado es el siguiente:

$g''(x) = e^x > 0, \forall x \in R \ \Rightarrow \boldsymbol{g(x)\ es\ convexa}\ (\cup)\ \boldsymbol{en\ R}.$

Como es $g'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $g(0) = 0$, la función tiene un mínimo absoluto en el punto $O(0,0)$, lo que justifica que:

$$\underline{La\ ecuación\ e^x = x + 1\ tiene\ una\ raíz\ \text{ú}nica\ para\ x = 0.}$$

****

4º) Haga un dibujo aproximado de las curvas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$ e indique los puntos de corte. Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores.

Los puntos de corte de las dos parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x;\ \ 2x^2 - 8x = 0;\ \ 2x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

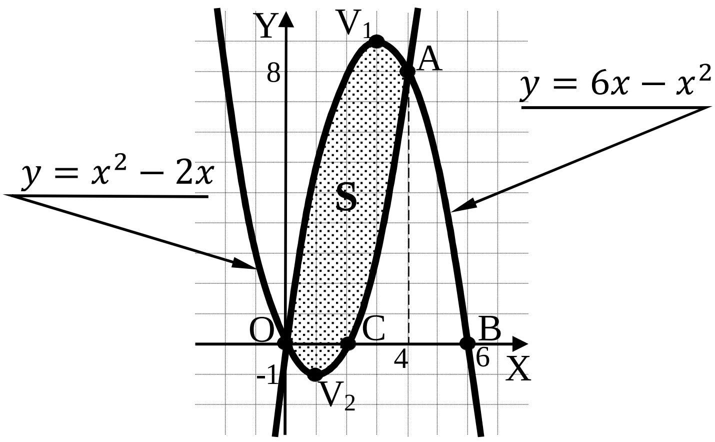
Los puntos de corte son $O(0,0)$ y $A(4,8)$.

La parábola $y = 6x - x^2$ corta al eje OX, además del origen, en $B(6,0)$. Su vértice es el siguiente:

$$y' = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3\ \rightarrow\ V_1(3,9).$$

La parábola $y = x^2 - 2x$ corta al eje OX, además del origen, en $C(2,0)$. Su vértice es el siguiente:

$$y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1\ \rightarrow\ V_2(1,-1).$$



En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la parábola $y = 6x - x^2$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $y = x^2 - 2x$, por lo cual el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] \cdot dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^4 = -\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 4 \cdot 16 = -\frac{128}{3} + 64 = \frac{-128+192}{3} = \underline{\frac{64}{3}\ u^2}.$$

****