# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDADES DE BALEARES

# SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II                    Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que porten información almacenada o puedan transmitirla.

## OPCIÓN A

1º) $a$) Discuta para qué valores de $a$ el sistema $\left.\begin{array}{r} x+(a-1)y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \\ -ax-y+z=1 \end{array}\right\}$ tiene solución.

$b$) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----------

$a$)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -a & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix}=2-9-a(a-1)+6a+1-3(a-1)=$$

$$=-6-a^2+a+6a-3a+3=-a^2+4a-3=0;\ \ a^2-4a+3=0;$$

$$a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow a_1=1, a_2=3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

Para $a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -2F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_2 = -\tfrac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 5F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 3\ \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ -x - y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando la segunda ecuación, por ejemplo, y haciendo $z = \lambda$, resulta:

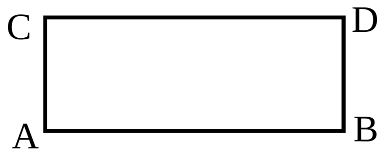
$$\left.\begin{array}{r} x + 3\lambda = 1 \\ -x - y + \lambda = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 - 3\lambda.$$

$$y = -x + \lambda - 1 = -1 + 3\lambda + \lambda - 1 = -2 + 4\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 1 - 3\lambda, y = -2 + 4\lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R.}$$

**********

2º) Dados los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,2)$, determina los puntos $C$ $y$ $D$ tales que el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo en el plano $\pi \equiv x+y-z=0$ y la coordenada $x$ del punto $C$ valga 1. Ved la figura adjunta.




----------

Los puntos del plano $\pi$ tienen la forma general $P(x, y, x+y)$; en particular, el punto $C$ es $C(1, y, 1+y)$ y el punto D es $D(x, y, x+y)$

$\overrightarrow{AB}=[B-A]=[(1,1,2)-(0,0,0)]=(1,1,2).$

$\overrightarrow{BC}=[C-B]=[(1,y,1+y)-(1,1,2)]=(0,y-1,y-1).$

$\overrightarrow{AC}=[C-A]=[(1,y,1+y)-(0,0,0)]=(1,y,1+y).$

Los puntos ABC determinan un triángulo rectángulo, por lo cual:

$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1^2+1^2+2^2)+[1^2+y^2+(1+y)^2]=[0^2+(y-1)^2+(y-1)^2];$

$1+1+4+1+y^2+1+2y+y^2=2\cdot(y^2-2y+1)=2y^2-4y+2;$

$4+1+1+2y=-4y;\;\; 6=-6y \Rightarrow y=-1 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{C(1,-1,0)}.$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Siendo $D(x,y,z)$:

$(1,1,2)=\overrightarrow{CD}=[D-C]=[(x,y,z)-(1,-1,0)]=(x-1,y+1,z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-1=1 \rightarrow x=2 \\ y+1=1 \rightarrow y=0 \\ z=2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{D(2,0,2)}.$$

**********

3º) Considere la función $f(x) = e^{x-3} - x - 2$, para $x \geq 0$. Calcule los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y deducir que si $x \geq 4$, $f(x) \geq -4$.

----------

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada:

$$f'(x) = e^{x-3} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x-3} = 1 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = e^{x-3} \;\Rightarrow\; f''(3) = e^{3-3} = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = e^{3-3} - 3 - 2 = 1 - 5 = -4 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{Mínimo: A(3, -4)}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)}.$$

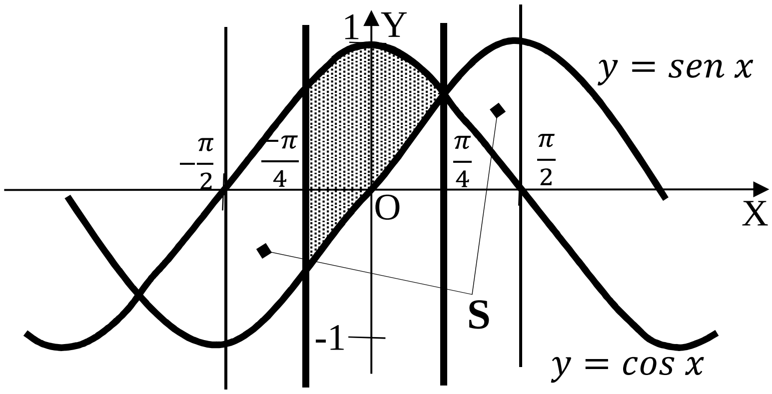
Teniendo en cuenta el periodo de crecimiento de la función es $(3, +\infty)$ y que $f(3) = -4$, queda justificado que:

$$\underline{Si\ x \geq 4\ es\ f(x) \geq -4}.$$

**********

4º) Haga un dibujo aproximado de las curvas $y = sen\ x$ e $y = \cos x$, con $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, indicando los puntos en que se cortan. Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

----------




Los puntos de corte de dos funciones se obtienen de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$sen\ x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$. Única solución en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Nótese que en el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la función $y = \cos x$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $y = sen\ x$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - sen\ x) \cdot dx = [sen\ x + cos\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(sen\ \frac{-\pi}{4} + \cos\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\sqrt{2}\ u^2} \cong \underline{1{,}414\ u^2}.$$

**********

OPCIÓN B

1º) Calcule la matriz $X$ tal que $A \cdot X \cdot A = B$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

----------

$A \cdot X \cdot A = B$, multiplicando por la izquierda y por la derecha por la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}; \;\; I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}}$.

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}.}$$

**********

2º) Calcule el punto simétrico de $A(1,1,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x+y+3z=6$.

----------

Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y+3z-6=0$ es $\vec{n}=(1,1,3)$.

La recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ que contiene al punto $A(1,1,1)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$.

El punto de corte de la recta $r$ y el plano $\pi$ es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+3z-6=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+(1+\lambda)+3(1+3\lambda)-6=0;$$

$1+\lambda+1+\lambda+3+9\lambda-6=0;\ \ 11\lambda-1=0 \ \Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{11}$.

El punto intersección es: $\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda=1+\frac{1}{11}=\frac{12}{11} \\ y=1+\lambda=1+\frac{1}{11}=\frac{12}{11} \\ z=1+3\lambda=1+\frac{3}{11}=\frac{14}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow\ P\left(\frac{12}{11},\frac{12}{11},\frac{14}{11}\right)$.

El punto $A'(x,y,z)$ es simétrico de $A(1,1,1)$ cuando sea $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA'}$:

$[P-A]=[A'-P];\ \ \left[\left(\frac{12}{11},\frac{12}{11},\frac{14}{11}\right)-(1,1,1)\right]=\left[(x,y,z)-\left(\frac{12}{11},\frac{12}{11},\frac{14}{11}\right)\right];$

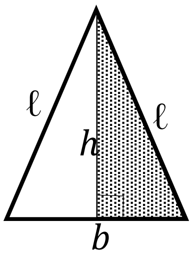
$$\left(\frac{1}{11},\frac{1}{11},\frac{3}{11}\right)=\left(\frac{11x-12}{11},\frac{11y-12}{11},\frac{11z-14}{11}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 11x-12=1 \rightarrow x=\frac{13}{11} \\ 11y-12=1 \rightarrow y=\frac{13}{11} \\ 11z-14=3 \rightarrow z=\frac{17}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{A'\left(\frac{13}{11},\frac{13}{11},\frac{17}{11}\right)}$$

**********

3º) Determinar un triángulo isósceles de perímetro 9 cm que tenga área máxima.

----------




$$\ell + \ell + b = 9; \;\; b = 9 - 2\ell.$$

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\ell^2 - b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4\ell^2 - (9-2\ell)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4\ell^2 - (81 - 36\ell + 4\ell^2)}}{2} = \frac{\sqrt{4\ell^2 - 81 + 36\ell - 4\ell^2}}{2} = \frac{\sqrt{36\ell - 81}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{4\ell - 9} = h.$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (9 - 2\ell) \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{4\ell - 9} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{(4\ell - 9) \cdot (9 - 2\ell)^2} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \sqrt{(4\ell - 9) \cdot (81 - 36\ell + 4\ell^2)} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \sqrt{324\ell - 729 - 144\ell^2 + 324\ell + 16\ell^3 - 36\ell^2} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \sqrt{16\ell^3 - 180\ell^2 + 648\ell - 729} = S.$$

La superficie será mínima cuando se anule su primera derivada:

$$S'(\ell) = \frac{3}{4} \cdot \frac{48\ell^2 - 360\ell + 648}{2 \cdot \sqrt{16\ell^3 - 180\ell^2 + 648\ell - 729}} = 0 \Rightarrow 48\ell^2 - 360\ell + 648 = 0;$$

$$2\ell^2 - 15\ell + 27 = 0; \;\; \ell = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{15 \pm 3}{4} \Rightarrow \ell_1 = \frac{9}{2}, \ell_2 = 3.$$

La solución $\ell_1 = \frac{9}{2}$ carece de sentido lógico, por lo cual: $\ell = 3\ cm.$

$\underline{La\ solución\ es\ un\ triángulo\ equilátero\ (isósceles)\ de\ 3\ cm\ de\ lado.}$

**********

4º) Calcule la integral indefinida: $I=\int \frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\cdot dx$.

----------

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -2 | -1 | 2 |
| 1 | | 1 | 0 | -2 |
| | 1 | -1 | -2 | $\boxed{0}$ |
| -1 | | -1 | 2 | |
| | 1 | -2 | $\boxed{0}$ | |
| 2 | | 2 | | |
| | 1 | $\boxed{0}$ | | |

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}=$$

$$=\frac{A(x^2-x-2)+B(x^2-3x+2)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-A-3B)x+(-2A+2B-C)}{x^3-2x^2-x+2}\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}A+B+C=2\\ -A-3B=1\\ -2A+2B-C=-2\end{array}\right\}\Rightarrow 1+3\Rightarrow -A+3B=0\Rightarrow \left.\begin{array}{r}-A+3B=0\\ -A-3B=1\end{array}\right\}\Rightarrow -2A=1$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}+3B=0;\ B=-\frac{1}{6}\Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+C=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{12+3+1}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}.$$

$$I=\int \frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\cdot dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{x+1}+\frac{\frac{8}{3}}{x-2}\right)\cdot dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x-2}=-\frac{1}{2}L|x-1|-\frac{1}{6}L|x+1|+\frac{8}{3}L|x-2|+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}\cdot dx=\frac{1}{6}\cdot\left[16L|x-2|-3L|x-1|-L|x+1|\right]+C.}$$

**********