PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A le produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1.600 limoneros, 800 naranjos y 1.000 manzanos, se pide:

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

----

a)

Sean x e y el número de lotes de los tipos A y B que se ofrecen, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es: $\left.\begin{array}{r} x+2y\le 16 \\ 0\le x\le 8 \\ x+y\le 10 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow x+2y\le 16 \Rightarrow y\le \frac{16-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	6
y	8	0

$② \Rightarrow x+y\le 10 \Rightarrow y\le 10-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	10
y	10	0

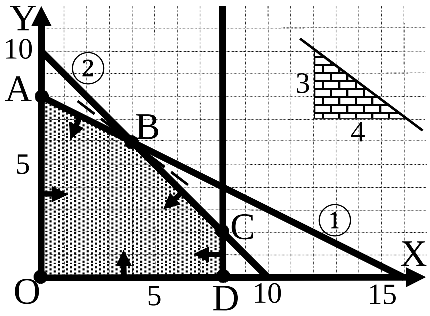
La función de objetivos es $f(x,y)=30x+40y$.

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=16 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,8).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=16 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y=16 \\ -x-y=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=6;\;\; x=4 \Rightarrow B(4,6).$$



$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=8 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2 \Rightarrow C(8,2).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=8 \end{array}\right\} \Rightarrow D(8,0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,8) = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 8 = 0 + 0 = 320.$$

$$B \Rightarrow f(4,6) = 30 \cdot 4 + 40 \cdot 6 = 120 + 240 = 360.$$

$$C \Rightarrow f(8,2) = 30 \cdot 8 + 40 \cdot 2 = 240 + 80 = 320.$$

$$D \Rightarrow f(8,0) = 30 \cdot 8 + 40 \cdot 0 = 240 + 0 = 240.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(4,6)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 30x + 40y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{40}x = -\frac{3}{4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ ofreciendo\ 4\ lotes\ de\ tipo\ A\ y\ 6\ de\ tipo\ B.}$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 360\ euros.}$

****

2º) En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la dimensión del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1.900 es la siguiente: $E(t)=\begin{cases}-1{,}6t^2+At+9.656 & si\ \ 0\le t\le 60\\ 16.400-Bt & si\ \ 60<t\le 110\end{cases}$, donde E es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de Km^2 y t el año de estudio. Se sabe que la función es continua y tiene un máximo en el año 1.937 $(t=37)$.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente la extensión de hielo ártico en los océanos en función del tiempo.

----

a)

Por ser $E(t)$ continua tiene que cumplirse que $\lim\limits_{x\to 60^-} E(t)=\lim\limits_{x\to 60^-} E(t)=E(60)$:

$$\lim_{x\to 60^-} E(t)=\lim_{x\to 60}(-1{,}6t^2+At+9.656)=-5.760+60A+9.656=$$

$$=60A+3.896=E(60).$$

$$\lim_{x\to 60^+} E(t)=\lim_{x\to 60}(16.400-Bt)=16.400-60B.$$

$$\lim_{x\to 60^-} E(t)=\lim_{x\to 60^-} E(t)=E(60)\Rightarrow 60A+3.896=16.400-60B;$$

$$60A+60B=16.400-3.896;\ \ 60A+60B=12.504;\ \ 5A+5B=1.042. \qquad (1)$$

Por tener la función $E(t)$ un máximo en el año 1.937 $(t=37)$ se tiene que cumplir que $E'(37)=0$.

$$E'(t)=\begin{cases}-3{,}2t+A & si\ \ 0\le t\le 60\\ -B & si\ \ 60<t\le 110\end{cases}.$$

$$E'(37)=0\Rightarrow -3{,}2\cdot 37+A=0;\ \ A=3{,}2\cdot 37=118{,}4.$$

Sustituyendo este valor en (1):

$$5\cdot 118{,}4+5B=1.042;\ \ 5B=1.042-592=450;\ \ B=\frac{450}{5}=90.$$

$$\underline{A=118{,}4\ y\ B=90}.$$

b)

La función resulta: $E(t)=\begin{cases}-1{,}6t^2+118{,}4\cdot t+9.656 & si\ \ 0\le t\le 60\\ 16.400-90\cdot t & si\ \ 60<t\le 110\end{cases}$.

El punto máximo es $E(37) = -1{,}6 \cdot 37^2 + 118{,}4 \cdot 37 + 9.656 =$

$= -1{,}6 \cdot 1.369 + 4.380{,}8 + 9.656 = -2.190{,}4 + 14.036{,}8 = 11.846{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(37;\ 11.846{,}4)$.

Otros puntos de la función son los siguientes:

$E(0) = 9.656 \Rightarrow A(0;\ 9.660)$.

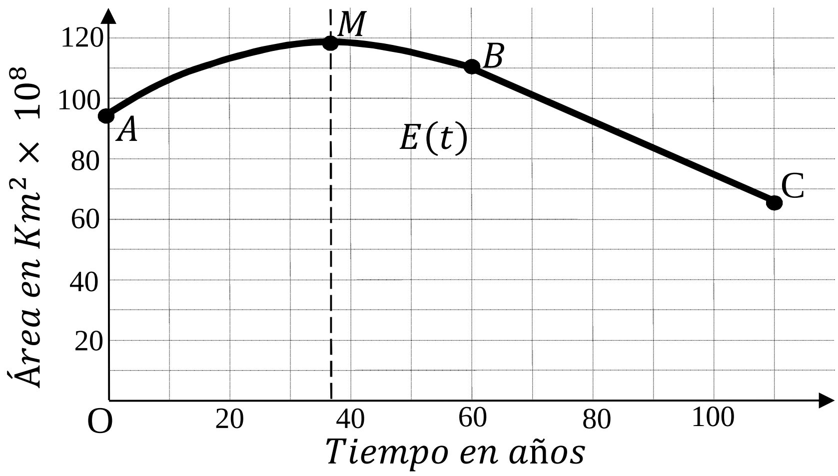
$E(60) = -1{,}6 \cdot 60^2 + 118{,}4 \cdot 60 + 9.656 = -5.760 + 7.104 + 9.656 =$

$= 11.000 \Rightarrow B(60;\ 11.000)$.

$E(110) = 16.400 - 90 \cdot 110 = 16.400 - 9.900 = 6.500 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(110;\ 6.500)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura adjunta.



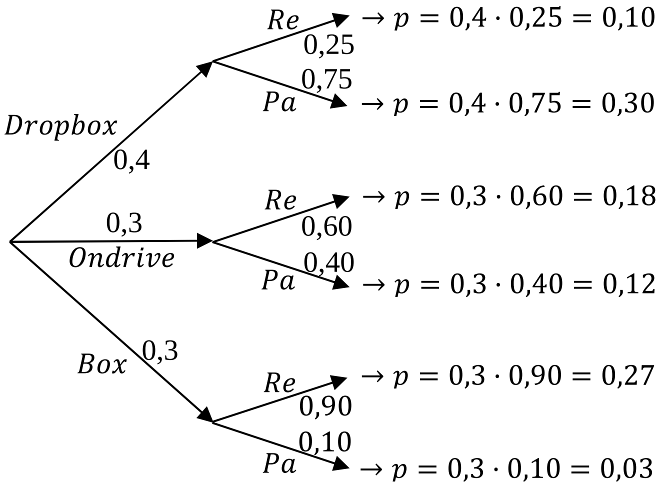
****

3º) Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Ondrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene el 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen está etiquetada en uno de dos tipos posibles: Retratos o Paisajes. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Ondrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.

a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato?

b) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea paisaje y esté en Box?

c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿cuál es la probabilidad de que esté en Ondrive? Justificar las respuestas.



a)

$$P = P(Re) = P(D) \cdot P(Re/D) + P(O) \cdot P(Re/O) + P(B) \cdot P(Re/B) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}60 + 0{,}3 \cdot 0{,}90 = 0{,}10 + 0{,}18 + 0{,}27 = \underline{0{,}55}.$$

b)

$$P = P(Pa \cap B) = P(B) \cdot P(Pa/B) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}03}.$$

c)

$$P = P(O/Pa) = \frac{P(O \cap Pa)}{P(Pa)} = \frac{P(O) \cdot P(Pa/O)}{P(D) \cdot P(Pa/D) + P(O) \cdot P(Pa/O) + P(B) \cdot P(Pa/B)} =$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}40}{0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}3 \cdot 0{,}40 + 0{,}3 \cdot 0{,}10} = \frac{0{,}12}{0{,}30 + 0{,}12 + 0{,}03} = \frac{0{,}12}{0{,}45} = \underline{0{,}2667}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial: $A \cdot X + A^2 = 2A$.

b) Hallar la matriz inversa de A. Justificar las respuestas.

----

a)

$$A \cdot X + A^2 = 2A; \;\; A \cdot X = 2A - A^2; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2A - A^2);$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (2A - A^2) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (2A - A^2)}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to -F_1 \\ F_2 \to -F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{2} F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - 2F_3 \\ F_2 \to F_2 + 2F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2A - A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (2A - A^2) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

$b)$

(Resuelto en el apartado anterior)

****

2º) En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la siguiente función: $C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3.600t + 20.400, 14 \leq t \leq 21$, siendo C el agua consumida en metros cúbicos y t la hora de realización del control. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua.

b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo.

c) Calcular el área encerrada por la curva C y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas.

----

a) b)

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto que se anule su primera derivada en ese punto.

$$C'(t) = -12t^2 + 420t - 3.600.$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -12t^2 + 420t - 3.600 = 0;\ \ t^2 - 35t + 300 = 0;$$

$$t = \frac{35 \pm \sqrt{1.225 - 1.200}}{2} = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 15, t_2 = 20.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$C''(t) = -24t + 420.$$

$$C''(15) = -24 \cdot 15 + 420 = -360 + 420 = 60 > 0 \Rightarrow Mín.\, para\ t = 15.$$

$$C(15) = -4 \cdot 15^3 + 210 \cdot 15^2 - 3.600 \cdot 15 + 20.400 =$$

$$= -13.500 + 47.250 - 54.000 + 20.400 = 150.$$

$$\underline{El\ consumo\ mínimo\ es\ de\ 150\ metros\ cúbicos}.$$

$$C''(20) = -24 \cdot 20 + 420 = -480 + 420 = -60 < 0 \Rightarrow Máx.\, para\ t = 20.$$

$$C(20) = -4 \cdot 20^3 + 210 \cdot 20^2 - 3.600 \cdot 20 + 20.400 =$$

$$= -32.000 + 84.000 - 72.000 + 20.400 = 400.$$

$$\underline{El\ consumo\ máximo\ es\ de\ 400\ metros\ cúbicos}.$$

$c)$

$$S = \int_{15}^{20} C(t) \cdot dt = \int_{15}^{20} (-4t^3 + 210t^2 - 3.600t + 20.400) \cdot dt =$$

$$= \left[-\frac{4 \cdot t^4}{4} + \frac{210 \cdot t^3}{3} - \frac{3.600 \cdot t^2}{2} + 20.400 \cdot t \right]_{15}^{20} =$$

$$= [-t^4 + 70t^3 - 1.800t^2 + 20.400 \cdot t]_{15}^{20} =$$

$$= (-20^4 + 70 \cdot 20^3 - 1.800 \cdot 20^2 + 20.400 \cdot 20) -$$

$$-(-15^4 + 70 \cdot 15^3 - 1.800 \cdot 15^2 + 20.400 \cdot 15) =$$

$$= -160.000 + 560.000 - 720.000 + 408000 + 50.625 - 236.250 + 405.000 -$$

$$-306.000 = 1.423.625 - 1.422.250 = 1.375.$$

$$\underline{S = 1.375 \ u^2}.$$

****

3º) En una ciudad se desea estimar la proporción de hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2.000, 1.200 y 1.000 hogares, respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra?

b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio?

c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para la estimación puntual anterior. Justificar las respuestas.

----

a)

$$Total\ hogares: 800 + 2.000 + 1.200 + 1.000 = 5.000.$$

$$\left.\begin{array}{l} Si\ a\ 5.000\ corresponden\ 400 \\ \quad a\ 800\ \ corresponden\ \ a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{800 \cdot 400}{5.000} = \frac{320}{5} = 64.$$

$$b = \frac{2.000 \cdot 400}{5.000} = \frac{800}{5} = 160. \qquad c = \frac{1.200 \cdot 400}{5.000} = \frac{480}{5} = 96.$$

$$d = \frac{1.000 \cdot 400}{5.000} = \frac{400}{5} = 80.$$

$$\underline{A\ los\ barrios\ A, B, C\ y\ D\ corresponden\ 64, 160, 96\ y\ 80, respectivamente.}$$

b)

$$P = \frac{64}{320} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

$$\underline{En\ el\ barrio\ B\ reciclan\ el\ 20\ \%\ de\ los\ hogares.}$$

c)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$
$$1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 400;\ \ p = 0{,}2;\ \ q = 0{,}8;\ \ \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{400}} = 0{,}02;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, $q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,2 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{400}};\ 0,2 + 1,76 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{400}}\right);$$

$$(0,2 - 1,76 \cdot 0,02;\ 0,2 + 1,96 \cdot 0,02);\quad (0,2 - 0,0392;\ 0,2 + 0,0392).$$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (0,1608;\ 0,2392)}.$$

****