PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2018 (FILTRADO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Un taller ha recibido el encargo de fabricar bicicletas de paseo y de montaña. Dicha fabricación la distribuye en dos fases: producción y montaje. Cada bicicleta de paseo requiere 5 horas de producción y 3 horas de montaje con un beneficio de 480 euros por cada bicicleta. Cada bicicleta de montaña, 3 horas de producción y 1 hora de montaje con un beneficio de 220 euros cada una. Si sólo se dispone de 120 horas de producción y de 60 horas de montaje, se pide:

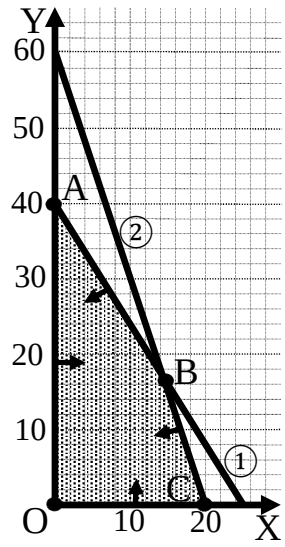
$a)$ ¿Cuántas bicicletas de paseo y cuántas de montaña han de fabricarse para que sean máximos los beneficios?

$b)$ ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

$a)$

Sean x e y el número de bicicletas de paseo y de montaña que producen en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes $\left.\begin{array}{r} 5x+3y \leq 120 \\ 3x+y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right\}.$



① $5x+3y \leq 120 \Rightarrow y \leq \frac{120-5x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	24
y	40	0

② $3x+y \leq 60 \Rightarrow y \leq 60-3x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	20
y	60	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 5x+3y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=120 \Rightarrow A(0,40).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+3y=120 \\ 3x+y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -5x-3y=-120 \\ 9x+3y=180 \end{array}\right\} 4x=60; x=15 \Rightarrow B(15,15).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=60 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=60;\ \ x=20 \Rightarrow C(20,0).$$

La función de objetivos es $f(x,y)=480x+220y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,40)=480\cdot 0+220\cdot 40=0+8.800=8.800.$$

$$B \Rightarrow f(15,15)=480\cdot 15+220\cdot 15=7.200+3.300=10.500.$$

$$C \Rightarrow f(20,0)=480\cdot 20+220\cdot 0=9.600+0=9.600.$$

El máximo se produce en el punto $B(15,15)$.

$$\underline{La\ producción\ es\ máxima\ fabricando\ 15\ bicicletas\ de\ cada\ tipo}.$$

$b)$

$$\underline{Los\ beneficios\ máximos\ son\ de\ 10.500\ euros}.$$

****

2º) La altura alcanzada por un misil en su trayectoria está determinada por la función $H(x) = -(x - A)^2 + B, 0 \leq x \leq 30$, donde $H(x)$ representa la altura en metros y x el tiempo en segundos. Sabiendo que la altura máxima se alcanza a los 15 segundos y que es 225 metros, se pide:

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente la altura en función de x.

c) Comprobar si la función $H(x)/(15x - 75)$ tiene alguna asíntota. Encontrarla en caso afirmativo. Justificar la respuesta.

---

a)

Por alcanzar 225 metros a los 15 segundos es:

$H(15) = 225 \Rightarrow -(15 - A)^2 + B = 225.$ (*)

Por presentar un máximo a los 15 segundos es $H'(15) = 0$:

$H'(x) = -2(15 - A) = 0;\ \ 15 - A = 0 \Rightarrow \underline{A = 15}.$

Sustituyendo en (*) el valor hallado de la constante A:

$-(15 - 15)^2 + B = 225 \Rightarrow \underline{B = 225}.$

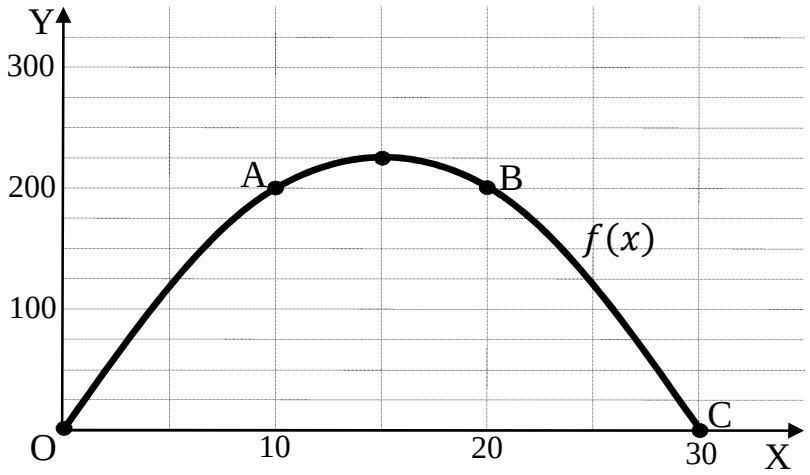
b)

La función resulta $H(x) = -(x - 15)^2 + 225.$

$H(10) = H(20) = -(20 - 15)^2 + 225 = -25 + 225 = 200.$

$H(0) = H(30) = -(30 - 15)^2 + 225 = -225 + 225 = 0.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



$c)$

La función $f(x) = H(x)/(15x - 75)$ resulta ser:

$$f(x) = \frac{H(x)}{(15x-75)} = \frac{-(x-15)^2+225}{15x-75} = \frac{-x^2+30x-225+225}{15x-75} = \frac{-x^2+30x}{15x-75}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+30x}{15x-75} = -\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$15x - 75 = 0;\ \ 15(x-5) = 0;\ \ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5.$$

$$\underline{La\ recta\ x = 5\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x^2+30x}{15x-75}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+30x}{15x^2-75x} = -\frac{1}{15}.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-x^2+30x}{15x-75} + \frac{x}{15}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-15x^2+450x+15x^2-75x}{15(15x-75)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{375x}{15(15x-75)} = \lim_{x\to\infty} \frac{25x}{15x-75} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{3x-15} = \frac{5}{3}.$$

$$\underline{La\ recta\ y = -\frac{1}{15}x + \frac{5}{3}\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

****

3º) Un medio de comunicación está realizando un estudio sobre la vivienda en España. Una parte del estudio consiste en estimar el precio medio. Para ello, realiza un muestreo aleatorio de 345 viviendas obteniendo una media de 201.400 euros. De estudios anteriores se sabe que el precio de la vivienda en España se distribuye según una distribución normal de desviación típica 38.000 euros.

a) Calcular el intervalo de confianza al 99 % del precio medio de la vivienda en España.

b) Si queremos que el intervalo tenga una amplitud de 5.000 euros, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra? Justificar las respuestas.

---

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha = 0{,}99 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}99 = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$
$(1-0{,}005 = 0{,}9950 \ \rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $n = 345$; $\overline{x} = 201.400$; $\sigma = 38.000$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(201.400 - 2{,}575 \cdot \frac{38.000}{\sqrt{345}};\ 201.400 + 2{,}575 \cdot \frac{38.000}{\sqrt{345}}\right);$$

$(201.400 - 2{,}575 \cdot 2.045{,}85;\ 201.400 + 2{,}575 \cdot 2.045{,}85);$

$(201.400 - 5.268{,}07;\ 201.400 + 5.268{,}07).$

$$\underline{I.C._{99\,\%} = (196.131{,}93;\ \ 206.668{,}07).}$$

b)

Datos: $\sigma = 38.000$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$; $E = 2.500$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}575 \cdot \frac{38.000}{2.500}\right)^2 =$

$= (2{,}575 \cdot 15{,}2)^2 = 39{,}19^2 = 1.531{,}94.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 1532\ viviendas.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz X, solución de la ecuación $A^{-1}XB^{-1} = I$, siendo $A^{-1}\ y\ B^{-1}$ las matrices inversas de A y B, respectivamente e I la matriz identidad de orden 3.

b) Hallar la matriz inversa de A. Justificar las respuestas.

---

a)

$$A^{-1}XB^{-1} = I;\ \ A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} \cdot B = A \cdot I \cdot B;\ \ I \cdot X \cdot I = A \cdot B \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{X = A \cdot B}$.

$$X = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

b)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) El número de espectadores que acuden a una película de estreno en una sala de cine, durante los 10 días de proyección, varía de acuerdo con la función $N(x) = -x^3 + 18x^2 - 81x + 250, 1 \leq x \leq 10$, siendo N el número de espectadores y x el día de proyección de la película. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿En qué días se produce el número máximo y mínimo de espectadores?

b) Hallar los valores de dichos máximo y mínimo.

c) Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de la asistencia de espectadores al estreno.

---

a)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$N'(x) = -3x^2 + 36x - 81.$$

$$N'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 36x - 81 = 0;\ x^2 - 12x + 27 = 0;\ x = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} =$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = 6 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 9, x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$N''(x) = -6x + 36.$$

$$N''(9) = -6 \cdot 9 + 36 = -54 + 36 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 9.$$

$$\underline{El\ máximo\ número\ de\ espectadores\ se\ produce\ el\ día\ noveno.}$$

$$N''(3) = -6 \cdot 3 + 36 = -18 + 36 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.$$

$$\underline{El\ mínimo\ número\ de\ espectadores\ se\ produce\ el\ tercer\ día.}$$

b)

$$N(9) = -9^3 + 18 \cdot 9^2 - 81 \cdot 9 + 250 = -729 + 18 \cdot 81 - 729 + 250 =$$

$$= -1.458 + 1.458 + 250 = 1.708 - 1.458 = 250.$$

$$\underline{El\ máximo\ de\ espectadores\ es\ de\ 250.}$$

$$N(3) = -3^3 + 18 \cdot 3^2 - 81 \cdot 3 + 250 = -27 + 18 \cdot 9 - 243 + 250 =$$

$$= -270 + 162 + 250 = 412 - 270 = 142.$$

$$\underline{El\ mínimo\ número\ de\ espectadores\ es\ de\ 142}.$$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función se deducen del máximo y mínimo hallados; también pueden obtenerse de la forma siguiente:

Por ser $N(x)$ polinómica es continua en su dominio, por lo cual, las raíces de la primera derivada dividen su dominio en los intervalos $(1,3), (3,9)\ y\ (9,10)$, en los cuales los valores de la derivada son, alternativamente, positivos y negativos. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1,3)$ es:

$$N'(2) = -3 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 81 = -12 + 72 - 81 = -21 < 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: N'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1,3) \cup (9,10)}.$$

$$\underline{Crecimiento: N'(x) > 0 \Rightarrow x \in (3,9)}.$$

****

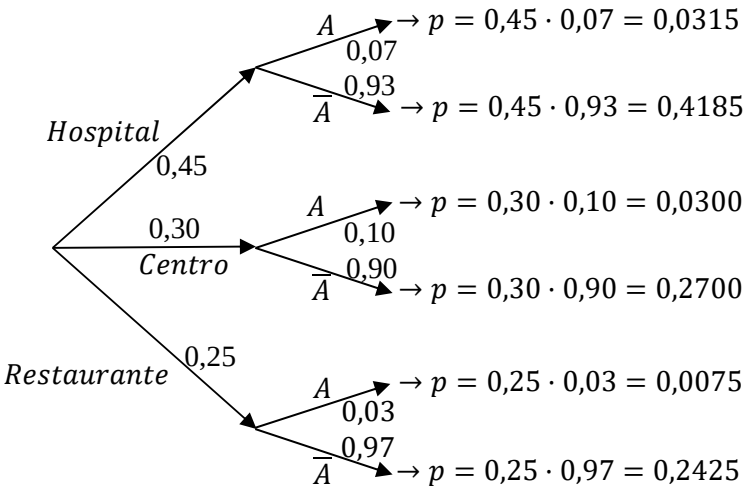
3º) Una compañía tiene máquinas expendedoras de bebidas en hospitales, centros de enseñanza y restaurantes. El 45 % de las máquinas las tiene en hospitales, el 30 % en centros de enseñanza y el resto en restaurantes. Las probabilidades de avería de las máquinas son: 7 % en hospitales, 10 % en centros de enseñanzas y 3 % en restaurantes.

a) Calcular la probabilidad de que se averíe una máquina cualquiera.

b) Si nos dicen que hay una máquina averiada, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de un hospital?

---

a)



$$P = P(A) = P(H \cap A) + P(C \cap A) + P(R \cap A) =$$

$$= P(H) \cdot P(A/H) + P(C) \cdot P(A/C) + P(R) \cdot P(A/R) =$$

$$= 0{,}45 \cdot 0{,}07 + 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}25 \cdot 0{,}03 = 0{,}0315 + 0{,}0300 + 0{,}0075 = \underline{0{,}069}.$$

b)

$$P = P(H/A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H) \cdot P(A/H)}{P(H) \cdot P(A/H) + P(C) \cdot P(A/C) + P(R) \cdot P(A/R)} =$$

$$= \frac{0{,}45 \cdot 0{,}07}{0{,}45 \cdot 0{,}07 + 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}25 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0315}{0{,}0315 + 0{,}0300 + 0{,}0075} = \frac{0{,}0315}{0{,}0690} = \underline{0{,}4565}.$$

****