PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60.000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40.000 botellas de vino tinto ni más de 25.000 botellas de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2,5 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios?

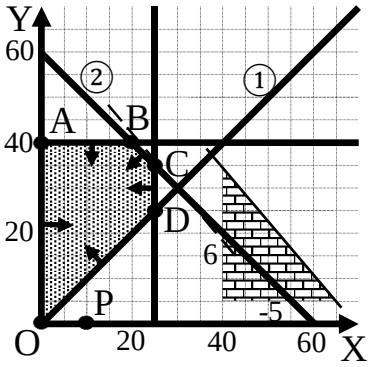
b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

---

a)

Sean x e y el número de miles de botellas de vinos blanco y tinto que produce la empresa, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x \le y \\ x+y \le 60 \\ 0 \le x \le 25 \\ 0 \le y \le 40 \end{array}\right\}$.



La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

① $\Rightarrow x \le y \Rightarrow P(10,0) \rightarrow No.$

x	0	60
y	0	60

② $\Rightarrow x+y \le 60 \Rightarrow y \le 60-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si$

x	60	0
y	0	60

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$ $\qquad$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 40 \\ x + y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 60 \\ x = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow C(25,35).$ $\qquad$ $D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = y \\ x = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow D(25,25).$

La función de objetivos es $f(x,y) = 3x + 2{,}5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 3 \cdot 0 + 2{,}5 \cdot 40 = 0 + 100 = 100.$

$B \Rightarrow f(20,40) = 3 \cdot 20 + 2{,}5 \cdot 40 = 60 + 100 = 160.$

$C \Rightarrow f(25,35) = 3 \cdot 25 + 2{,}5 \cdot 35 = 75 + 87{,}5 = 162{,}5.$

$D \Rightarrow f(25,25) = 3 \cdot 25 + 2{,}5 \cdot 25 = 75 + 62{,}5 = 137{,}5.$

El máximo se produce en el punto $C(25,35)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 3x + 2{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2{,}5}x = -\frac{30}{25}x = -\frac{6}{5}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$$

$\underline{Beneficio\ máximo: fabricando\ 25.000\ botellas\ de\ blanco\ y\ 35.000\ de\ tinto.}$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 162.500\ euros.}$

****

2º) El consumo anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1.960 a 2.000 se modeliza con la función $F(t) = 0{,}025t^3 - At^2 + Bt + 654, 0 \leq t \leq 40$, donde $F(t)$ es el número de litros y t el tiempo desde el año 1.960. Se sabe que en el año 1.970 $(t = 10)$ el consumo fue de 711,5 litros y en 1.990 $(t = 30)$ el consumo fue de 526,5 litros.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo.

---

a)

Por ser en 1.970 un consumo de 711,5 litros es:

$$F(10) = 711{,}5 \Rightarrow 0{,}025 \cdot 10^3 - A \cdot 10^2 + B \cdot 10 + 654 = 711{,}5;$$

$$25 - 100A + 10B + 654 = 711{,}5: \; -100A + 10B = 32{,}5. \quad (1)$$

Por ser en 1.990 un consumo de 526,5 litros es:

$$F(30) = 711{,}5 \Rightarrow 0{,}025 \cdot 30^3 - A \cdot 30^2 + B \cdot 30 + 654 = 711{,}5;$$

$$675 - 900A + 30B + 654 = 526{,}5: \; -900A + 30B = -802{,}5. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} -100A + 10B = 32{,}5 \\ -900A + 30B = -802{,}5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -100A + 10B = 32{,}5 \\ 300A - 10B = 267{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow 200A = 300;$$

$$2A = 3 \Rightarrow \underline{A = 1{,}5}.$$

$$-100 \cdot 1{,}5 + 10B = 32{,}5; \;\; 10B = 32{,}5 + 150 = 182{,}5 \Rightarrow \underline{B = 18{,}25}.$$

b)

La función resulta $F(t) = 0{,}025t^3 - 1{,}5t^2 + 18{,}25t + 654$.

Para facilitar la representación gráfica se determinan los máximos y mínimos de la función.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$F'(t) = 0{,}075t^2 - 3t + 18{,}25.$$

$F'(t) = 0 \Rightarrow 0{,}075t^2 - 3t + 18{,}25 = 0;\ \ 75t^2 - 3.000t + 18.250 = 0;$

$3t^2 - 120t + 730 = 0;\ \ t = \frac{120 \pm \sqrt{14.400 - 8.760}}{6} = \frac{120 \pm \sqrt{5.640}}{6} \cong \frac{120 \pm 75{,}1}{6} =$

$= 20 \pm 12{,}5 \Rightarrow t_1 = 7{,}5, t_2 = 32{,}5.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$F''(t) = 0{,}15t - 3.$

$F''(7{,}5) = 0{,}15 \cdot 7{,}5 - 3 = 1{,}125 - 3 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 7{,}5.$

$F(7{,}5) = 0{,}025 \cdot 7{,}5^3 - 1{,}5 \cdot 7{,}5^2 + 18{,}25 \cdot 7{,}5 + 654 =$

$= 10{,}55 - 84{,}38 + 136{,}88 + 654 = 717{,}05 \Rightarrow Máx. \Rightarrow P(7{,}5;\ 717{,}05).$

$F''(32{,}5) = 0{,}15 \cdot 32{,}5 - 3 = 4{,}875 - 3 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 32{,}5.$

$F(32{,}5) = 0{,}025 \cdot 32{,}5^3 - 1{,}5 \cdot 32{,}5^2 + 18{,}25 \cdot 32{,}5 + 654 =$

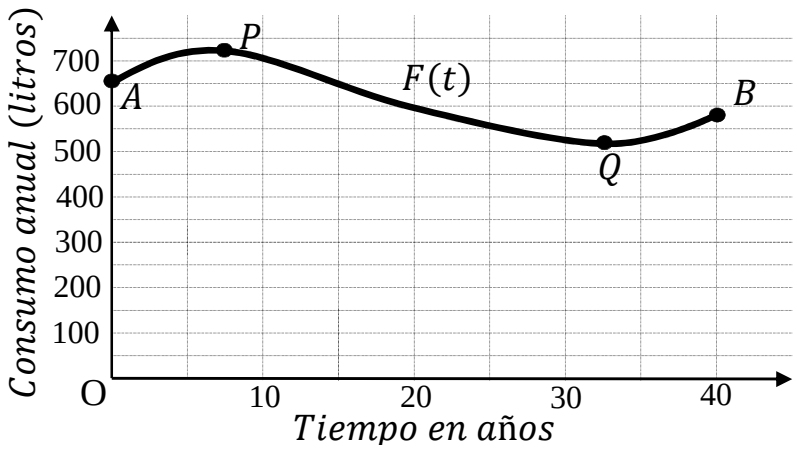
$= 858{,}20 - 1.584{,}38 + 593{,}13 + 654 = 520{,}95 \Rightarrow Mín. \Rightarrow Q(32{,}5;\ 520{,}95).$

Otros puntos son: $F(0) = 654 \Rightarrow A(0, 654).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:

$F(40) = 0{,}025 \cdot 40^3 - 1{,}5 \cdot 40^2 + 18{,}25 \cdot 40 + 654 =$

$= 1.600 - 2.400 + 730 + 654 = 584 \Rightarrow B(40, 584).$



****

3º) Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectáreas. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 toneladas por hectárea. Se sabe que el número de toneladas por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 %.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0,5? Justificar la respuesta.

---

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$1-0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 37;\;\; \overline{x} = 78;\;\; \sigma = 2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(78 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{37}};\; 78 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{37}}\right);\; (78 - 1{,}96 \cdot 0{,}3288;\; 78 + 1{,}96 \cdot 0{,}3288);$$

$(78 - 0{,}6444;\; 78 + 0{,}6444).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (77{,}3556;\; 78{,}644).}$$

b)

Datos: $\sigma = 2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\;\; E = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{2}{0{,}25}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 8)^2 = 15{,}68^2 = 245{,}86.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 246\ zonas.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifique $AX - B = BX + A$. Justificar la respuesta.

$$AX - B = BX + A;\ \ AX - BX = A + B;\ \ (A - B) \cdot X = A + B;$$

$$(A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B);\ \ I \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B)}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $(A - B)$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A - B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X obtenida:

$$X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B) = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente: $I(t) = -3t^2 + 62t, 0 \leq t \leq 10 \; y \; G(t) = t^2 - 10t + 120, 0 \leq t \leq 10$, donde I representa los ingresos y G los gastos. Se pide, razonando las respuestas:

a) La función que expresa el beneficio de la empresa.

b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende?

c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $G(t)$ y el eje de abscisas en el intervalo $(0, 5)$.

---

a)

$$B(t) = I(t) - G(t) = -3t^2 + 62t - (t^2 - 10t + 120) =$$

$$= -3t^2 + 62t - t^2 + 10t - 120 = -4t^2 + 72t - 120.$$

$$\underline{B(t) = -4(t^2 - 18t + 30)}.$$

b)

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada y es positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$B'(t) = -4(2t - 18) = -8(t - 9).$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -8(t - 9) = 0; \;\; t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9.$$

$$B''(t) = -9 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 9.$$

$$\underline{Se\ obtiene\ el\ máximo\ rendimiento\ para\ t = 9\ años}.$$

$$B(9) = -4(9^2 - 18 \cdot 9 + 30) = -4(81 - 162 + 30) = -4(111 - 162) =$$

$$= -4(-51) = 204.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 204.000\ euros}.$$

c)

La función $G(t) = t^2 - 10t + 120$ tiene todas sus ordenadas positivas en el intervalo $(0, 5)$, por la cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^5 G(t) \cdot dt = \int_0^5 (t^2 - 10t + 120) \cdot dt = \left[\frac{t^2}{3} - \frac{10t^2}{2} + 120t\right]_0^5 =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 120t\right]_0^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 5 \cdot 5^2 + 120 \cdot 5\right) - 0 = \frac{125}{3} - 75 + 600 =$$

$$= \frac{125}{3} + 525 = \frac{125+1.575}{3} = \frac{1.700}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{1.700}{3}\ u^2 \cong 56{,}67\ u^2.}$$

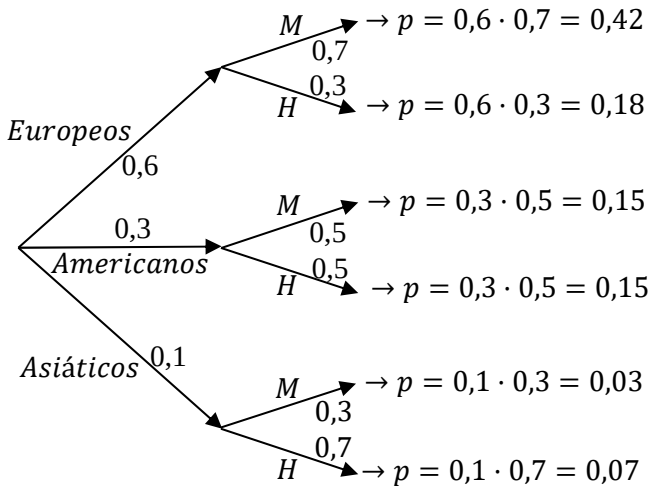
****

3º) Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.

a) Si se seleccionan un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer americana?

b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea?



a)

$$P = P(M \cap Am) = P(Am) \cdot P(M/Am) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = \underline{0.15}.$$

b)

$$P = P(M) = P(Eu \cap M) + P(Am \cap M) + P(As \cap M) =$$

$$= P(Eu) \cdot P(M/Eu) + P(Am) \cdot P(M/Am) + P(AS) \cdot P(M/As) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}42 + 0{,}15 + 0{,}03 = \underline{0{,}60}.$$

c)

$$P = P(Eu/M) = \frac{P(Eu \cap M)}{P(M)} = \frac{P(Eu) \cdot P(M/Eu)}{P(Eu) \cdot P(M/Eu) + P(Am) \cdot P(M/Am) + P(AS) \cdot P(M/As)} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}7}{0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}42}{0{,}42 + 0{,}15 + 0{,}03} = \frac{0{,}42}{0{,}60} = \underline{0{,}70}.$$

****