PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3.000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocina de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el beneficio máximo?

b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

----

a)

Sean x e y el número de cocinas vitrocerámicas y de inducción que venden en la tienda, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es:

$$\left.\begin{array}{r} 100x+200y\leq 3.000 \\ x+y\leq 20 \\ x\geq 0;\ \ 0\leq y\leq 12 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y\leq 30 \\ x+y\leq 20 \\ x\geq 0;\ \ 0\leq y\leq 12 \end{array}\right\}.$$

La función de objetivos es:

$$f(x,y)=30\ \%\ de\ 100\,x+25\ \%\ de\ 200\,y=30x+50y.$$

(1) $\Rightarrow x+2y\leq 30 \Rightarrow y\leq \frac{30-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

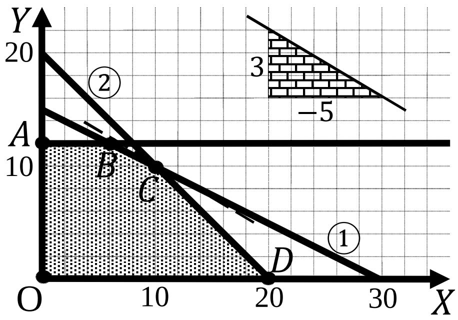
x	30	0
y	0	15

(2) $\Rightarrow x+y\leq 20 \Rightarrow y\leq 20-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	20	0
y	0	20

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 12).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 30 \\ y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow B(6, 12).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 30 \\ x + y = 20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 2y = 30 \\ -x - y = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow C(10, 10).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(20, 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 12) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 12 = 0 + 600 = 600.$

$B \Rightarrow f(6, 12) = 30 \cdot 6 + 50 \cdot 12 = 180 + 600 = 780.$

$C \Rightarrow f(10, 10) = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 300 + 500 = 800.$

$D \Rightarrow f(20, 0) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El máximo se produce en el punto $C(10, 10)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 30x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{50}x = -\frac{3}{5}x \Rightarrow m = -\frac{3}{5}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ vendiendo\ 10\ cocinas\ de\ cada\ clase.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ asciendo\ a\ 800\ euros.}$

****

2º) Durante la crecido de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función $C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20, (0 \leq t \leq 6)$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal.

b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3 \; y \; t = 5$.

----

a)

Es condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativos que se anule su primera derivada.

$$C'(t) = 6t^2 - 42t + 60'.$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0; \;\; t^2 - 7t + 10 = 0; \;\; t = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 5.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$C''(t) = 12t - 42.$$

$$C''(2) = 12 \cdot 2 - 42 = 24 - 42 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo \; para \; t = 2.$$

$$C''(5) = 12 \cdot 5 - 42 = 60 - 42 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo \; para \; t = 5.$$

$$\underline{El \; caudal \; máximo \; se \; produce \; a \; las \; 2 \; horas \; y \; el \; mínimo \; a \; las \; 5 \; horas.}$$

b)

$$C(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 20 = 16 - 84 + 140 = 72.$$

$$\underline{El \; caudal \; máximo \; es \; de \; 72 \; m^3/s.}$$

$$C(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 20 = 250 - 525 + 320 = 45.$$

$$\underline{El \; caudal \; mínimo \; es \; de \; 45 \; m^3/s.}$$

c)

Teniendo en cuenta que en el intervalo $[3, 5]$ todas las ordenadas de la función

$C(t)$ son positivas, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_3^5 C(t) \cdot dt = \int_3^5 (2t^3 - 21t^2 + 60t + 20) \cdot dt =$$

$$= \left[\frac{2t^4}{4} - \frac{21t^3}{3} + \frac{60t^2}{2} + 20t\right]_3^5 = \left[\frac{t^4}{2} - 7t^3 + 30t^2 + 20t\right]_3^5 =$$

$$= \left(\frac{5^4}{2} - 7 \cdot 5^3 + 30 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5\right) - \left(\frac{3^4}{2} - 7 \cdot 3^3 + 30 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3\right) =$$

$$= \frac{625}{2} - 875 + 750 + 100 - \frac{81}{2} + 189 - 270 - 60 = \frac{544}{2} - 1.205 + 1.039 =$$

$$= 272 - 166 = \underline{106\ u^2}.$$

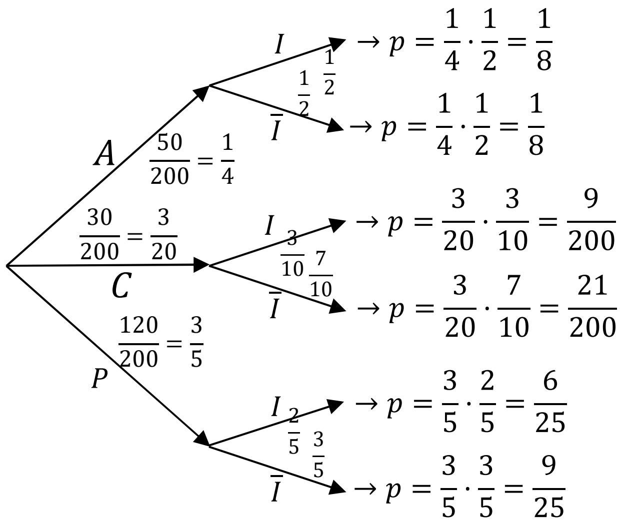
****

3º) En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga.

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino?



a)

Por la regla de Laplace: $P=\frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}=\frac{48}{120}=\frac{4}{10}=\underline{\frac{2}{5}=0{,}4}.$

b)

$$P=P(I)=P(A)\cdot P(I/A)+P(C)\cdot P(I/C)+P(P)\cdot P(I/P)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{8}+\frac{9}{200}+\frac{6}{25}=\frac{25+9+48}{200}=\frac{82}{200}=\underline{\frac{41}{100}=0{,}41}.$$

c)

$$P=P(P/I)=\frac{P(P\cap I)}{P(I)}=\frac{P(P)\cdot P(I/P)}{P(I)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{41}{100}}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{41}{100}}=\underline{\frac{24}{41}=0{,}5854}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$.

$b)$ Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$.

$a)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1+2x & 3 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -1 + 2x + 3x = 0;\ \ 5x = 1 \Rightarrow x = \tfrac{1}{5}.$$

$$\underline{La\ matriz\ (A \cdot B)^{-1}\ no\ existe\ para\ x = \tfrac{1}{5}}.$$

$b)$

Para $x = 1$ es $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A \cdot B| = 4$. $\quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.\,de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Para\ x = 1\ es\ (A \cdot B)^{-1} = \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función $F(x)=\begin{cases} 3+Ax & si\ \ 2\leq x\leq 5 \\ 53+2x+Bx^2 & si\ \ 5<x\leq 8 \end{cases}$, siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y x el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las constantes A y B.

b) Calcular las asíntotas verticales de la función $G(x)=\frac{F(x)}{x^2-3x-4}$ en el intervalo $[2,5]$.

----

a)

Se sabe que $F(5)=13$:

$F(5)=3+A\cdot 5=13;\ \ 5A=10\Rightarrow \underline{A=2}$.

La función resulta $F(x)=\begin{cases} 3+2x & si\ \ 2\leq x\leq 5 \\ 53+2x+Bx^2 & si\ \ 5<x\leq 8 \end{cases}$.

Por ser $F(x)$ continua tiene que cumplirse que: $\lim\limits_{x\to 5^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}F(x)=F(5)$.

$\lim\limits_{x\to 5^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 5}(3+2x)=3+2\cdot 5=3+10=13=F(5)$.

$\lim\limits_{x\to 5^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 5}(53+2x+Bx^2)=53+2\cdot 5+B\cdot 5^2=53+10+25B=$

$=63+25B=13;\ \ 50+25B=0;\ \ 2+B=0\Rightarrow \underline{B=-2}$.

b)

En el intervalo $[2,5]$ la función es $F(x)=2x+3$.

La función $G(x)$ resulta ser $G(x)=\frac{2x+3}{x^2-3x-4}$.

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores reales de x que anulan el denominador.

$x^2-3x-4=0;\ \ x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\Rightarrow x_1=-1;\ x_2=4$.

$\underline{\mathit{Las\ asíntotas\ verticales\ de}\ G(x)=\frac{2x+3}{x^2-3x-4}\ \mathit{son}\ x=-1\ y\ x=4.}$

****

3º) El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular el intercalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}95=0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750\ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=36;\ \sigma=24;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(36-1{,}96\cdot\frac{24}{\sqrt{100}};\ 36+1{,}96\cdot\frac{24}{\sqrt{100}}\right);\ \ (36-1{,}96\cdot 2{,}4;\ 36+1{,}96\cdot 2{,}4);$

$(36-4{,}704;\ 36+4{,}704).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(31{,}296;\ \ 36{,}704)}.$$

b)

Datos: $\sigma=24;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\ \ E=2{,}5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{24}{2{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 9{,}6)^2=18{,}816^2=354{,}04.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 355\ clientes}.$$

****