PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. Es estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

1º) Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

Sean x e y el número de envases de los compuestos A y B que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y\le 300 \\ x+y\le 80 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y\le 100 \\ x+y\le 80 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

$(1) \Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y\ge \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	100
y	50	0

$(2) \Rightarrow x+y\le 80 \Rightarrow y\le 80-x \rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	80	0
y	0	80

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

La función de objetivos es $f(x,y)=100x+120y$.

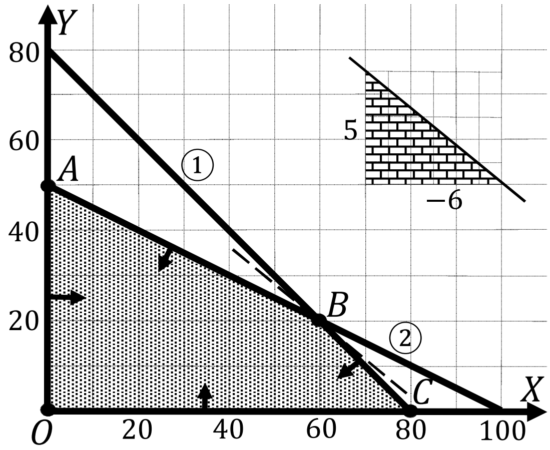
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 50).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 100 \\ x + y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{r} x + 2y = 100 \\ -x - y = -80 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$y = 20;\ \ x = 60 \Rightarrow B(60, 20).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x = 80 \end{array}\right\} \Rightarrow C(80, 0).$$



Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 50) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 50 = 0 + 6.000 = 6.000.$

$B \Rightarrow f(60, 20) = 100 \cdot 60 + 120 \cdot 20 = 6.000 + 2.400 = 8.400.$

$C \Rightarrow f(80, 0) = 100 \cdot 80 + 120 \cdot 0 = 8.000 + 0 = 8.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(60, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 100x + 120y = 0 \Rightarrow y = -\frac{100}{120}x = -\frac{10}{12}x \Rightarrow m = -\frac{5}{6}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ consigue\ fabricando\ 60\ envases\ A\ y\ 20\ envases\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 8.400\ euros.}$

****

2º) Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0,5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel, siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel, ¿cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Sean x e y el número de pares de zapatos y de botas que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ 0{,}5x+y\le 35 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ x+2y\le 70 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+y\le 50 \Rightarrow y\le 50-x \rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

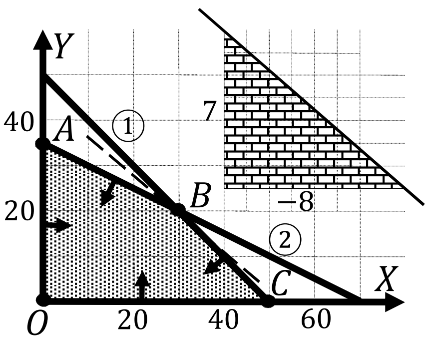
② $\Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y\ge \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	80	0
y	0	80

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

La función de objetivos es $f(x,y)=70x+80y$.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=35 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,35).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x+2y=70 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-50 \\ x+2y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$y=20;\;\; x=30 \Rightarrow B(30,20).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=50 \end{array}\right\} \Rightarrow C(50,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,35)=70\cdot 0+80\cdot 35=0+2.800=2.800.$

$B\Rightarrow f(30,20)=70\cdot 30+80\cdot 20=2.100+1.600=3.700.$

$C \Rightarrow f(50, 0) = 70 \cdot 50 + 80 \cdot 0 = 3.500 + 0 = 3.500.$

El valor máximo se produce en el punto $B(30, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 70x + 80y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{80}x = -\frac{7}{8}x \Rightarrow m = -\frac{7}{8}.$

$\underline{Máximo\ beneficio: fabricando\ 30\ pares\ de\ zapatos\ 20\ \ pares\ de\ botas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.700\ euros.}$

****

3º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $e\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea la solución de la siguiente ecuación matricial: $A\cdot B\cdot X=A\cdot B+I$.

$$A\cdot B\cdot X=A\cdot B+I;\ \ (A\cdot B)\cdot X=(A\cdot B)+I;$$

$$(A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B)\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot[(A\cdot B)+I];\ \ I\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot[(A\cdot B)+I].$$

$$\underline{X=(A\cdot B)^{-1}\cdot[(A\cdot B)+I]}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}4 & -6\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-8+18=10. \qquad (A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -6 & -2\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow(A\cdot B)^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

$$(A\cdot B)+I=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

$$X=(A\cdot B)^{-1}\cdot[(A\cdot B)+I]=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\underline{X=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}8 & 6\\ -3 & 14\end{pmatrix}}.$$

****

4º) Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para que se verifique: $X^2 - 4X + 3I = O$.

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$4 \cdot X = 4 \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$X^2 - 4X + 3I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ 9 - 12 + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0; \;\; a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$$

$$\underline{X^2 - 4X + 3I = O \Rightarrow a = 1 \; y \; a = 3.}$$

****

5º) Durante el estudio de medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t, expresado en horas de acuerdo con la función: $R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \ (1 \leq t \leq 7)$. Determinar, justificando las respuestas, en qué momento se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

$R(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 60 = 1 - 12 + 36 + 60 = 85.$

$R(7) = 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 36 \cdot 7 + 60 = 343 - 12 \cdot 49 + 252 + 60 =$

$= 343 - 588 + 252 + 60 = 655 - 588 = 67.$

$R'(t) = 3t^2 - 24t + 36.$ $\qquad$ $R''(t) = 6t - 24.$

$R'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0; \ \ t^2 - 8t + 12 = 0; \ \ t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} =$

$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 2; \ \ t_2 = 6.$

$R''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = 12 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$

$R(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 60 = 8 - 48 + 72 + 60 = 140 - 48 = 92.$

$\underline{El\ ruido\ máximo\ se\ produce\ a\ las\ 2\ horas\ y\ es\ de\ 92\ decibelios.}$

$R''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 6.$

$R(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 60 = 216 - 12 \cdot 36 + 216 + 60 =$

$= 216 - 432 + 216 + 60 = 60.$

$\underline{El\ ruido\ mínimo\ se\ produce\ a\ las\ 6\ horas\ y\ es\ de\ 60\ decibelios.}$

****

6º) Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x, entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ en cm, viene determinada por la cantidad de levadura de acuerdo a la función: $F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & si \;\; 1 \leq x < 3 \\ x^2 + Ax - B & si \;\; 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$. Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Por ser continua la función se cumple que $\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^+} F(x) = F(3)$.

$F(2) = 2;\;\; 2B + 2A = 2;\;\; A + B = 1.$ (1)

$\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3} (Bx + 2A) = B \cdot 3 + 2A = 2A + 3B.$

$\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 + Ax - B) = 3^2 + A \cdot 3 - B = 3A - B + 9.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3} (2Bx + 2A) = 2A + 3B \\ \lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 3Ax + 8B) = 3A - B + 9 = F(3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A + 3B = 3A - B + 9;\;\; A - 4B = -9.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ A - 4B = -9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ -A + 4B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 5B = 10;\;\; \underline{B = 2}.$$

$A + 2 = 1 \Rightarrow \underline{A = -1}.$

****

7º) Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre los valores $x = 1$ y $x = 3$.

b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}$.

----

a)

En el intervalo $(1, 3)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ (que es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2) son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 (x^2 + 3x + 2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 2 \cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) = 9 + \frac{27}{2} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2 =$$

$$= 13 - \frac{1}{3} + 12 = 25 - \frac{1}{3} = \frac{75-1}{3} = \frac{74}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{74}{3}\ u^2 \cong 24{,}67\ u^2.}$$

b)

Asíntotas verticales: Son los valores reales que anulan el denominador.

$$3(x^2 + 3x + 2) = 0;\ x^2 + 3x + 2 = 0;\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = -1.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2\ y\ x = -1.}$$

Asíntota horizontal: Es el valor del límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)} = -1.$$

$$\underline{Asíntota\ vertical: y = -1.}$$

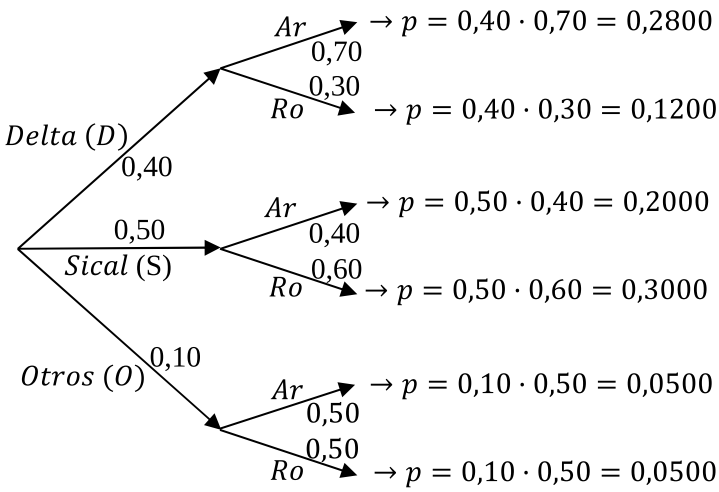
No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

8º) En Portugal, el 40 % del café consumido es de marca Delta, el 50 % de marca Sical y el 10 % restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábiga para el 70 % de sus envases y la variedad robusta para el 30 % restante. Sical utiliza la variedad arábiga en el 40 % de sus envases y la robusta en el 60 %. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50 % de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de la variedad arábiga.

b) Calcular la probabilidad de que un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta.



a)

$$P = P(S \cap Ar) = P(S) \cdot P(Ar/S) = 0{,}50 \cdot 0{,}40 = \underline{0{,}20}.$$

b)

$$P = P(Ro) = P(D \cap Ro) + P(S \cap Ro) + P(O \cap Ro) =$$

$$= P(D) \cdot P(Ro/D) + P(S) \cdot P(Ro/S) + P(O) \cdot P(Ro/O) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}30 + 0{,}50 \cdot 0{,}60 + 0{,}10 \cdot 0{,}50 = 0{,}120 + 0{,}300 + 0{,}050 = \underline{0{,}470}.$$

****

9º) Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en mm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=8;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(8-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}};\ 8+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\right);\ \ (8-1{,}96\cdot 0{,}2;\ 8+1{,}96\cdot 0{,}2);$

$(8-0{,}392;\ 8+0{,}392).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(7{,}608;\ 8{,}392)}.$$

****

10º) Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Teniendo en cuenta que el error máximo es la mitad del intervalo de confianza, los datos son los siguientes:

Datos: $\sigma=20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\ \ E=\frac{10}{2}=5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{20}{5}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 4)^2=7{,}84^2=61{,}4656.$

$\underline{Tenemos\ que\ visitar\ al\ menos\ 62\ tiendas.}$

****