PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = 2C$, con B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

$$A \cdot X - B^t = 2C;\ \ A \cdot X = 2C + B^t;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2C + B^t);$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (2C + B^t) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (2C + B^t)}.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1;\ \ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2C + B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2C + B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (2C + B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -1 \\ 1 & 20 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

---

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 4 + 3x = 0;\ \ 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1\}}.$$

b)

Para $x = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-3y+z=-1 \\ -3x+2y-z=-2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3+4-3-9-2+2=-5\neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ de\ incógnitas.$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché-Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{18-2-2-6-12-1}{-5}=\frac{-5}{-5}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{1-4-18-3+2+12}{-5}=\frac{-10}{-5}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{6+24+3-54+2+4}{-5}=\frac{-15}{-5}=3.$$

$$\underline{Solución: x=1, y=2, z=3.}$$

****

4º) Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 euros y en cada cazadora 70 euros, calcular, justificando las respuestas:

a) El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

---

a)

Sean $x\ e\ y$ el número de abrigos y cazadoras que se confeccionan semanalmente en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{matrix} x+2y\le 80 \\ 3x+2y\le 120 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{matrix}\right\}$.

$① \Rightarrow x+2y\le 80 \Rightarrow y\le \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

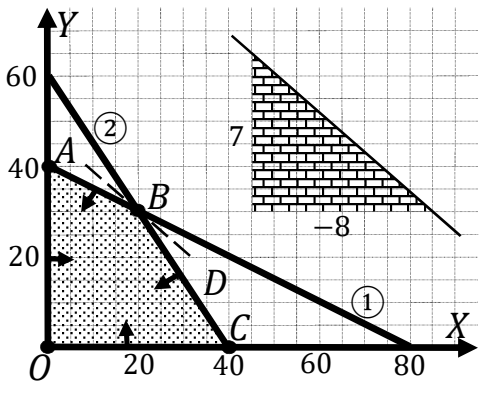
x	0	80
y	40	0

$② \Rightarrow 3x+2y\le 120 \Rightarrow y\le \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	60	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ x+2y=80 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y=80 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=40 \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=80 \\ 3x+2y=120 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x-2y=-80 \\ 3x+2y=120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=40;\ \ x=20;\ \ 20+2y=80;\ \ 2y=60 \Rightarrow y=30 \Rightarrow B(20,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x=120;\ \ x=40 \Rightarrow C(40,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=80x+70y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 80 \cdot 0 + 70 \cdot 40 = 0 + 2.800 = 2.800.$

$B \Rightarrow f(20,30) = 80 \cdot 20 + 70 \cdot 30 = 1.600 + 2.100 = 3.700.$

$C \Rightarrow f(40,0) = 80 \cdot 40 + 70 \cdot 0 = 3.200 + 0 = 3.200.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,40)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 80x + 70y = 0 \Rightarrow y = -\frac{80}{70}x = -\frac{8}{7}x \Rightarrow m = -\frac{8}{7}.$$

$\underline{Los\ beneficios\ son\ máximos\ confeccionando\ 20\ abrigos\ y\ 30\ cazadoras}.$

$b)$

$\underline{Los\ máximos\ beneficios\ son\ de\ 3.700\ euros}.$

****

5º) Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos de tiempo de crianza, x, viene dada por la función $G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2$ $(1 \leq x \leq 4)$. Determinar, justificando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Por alcanzar a los 2 años la graduación de 22 grados es $G(2) = 22$.

$G(2) = 22 \Rightarrow 2^3 - A \cdot 2^2 + 6B \cdot 2 + 2 = 22;\ \ 8 - 4A + 12B + 2 = 22;$

$-4A + 12B = 12;\ -A + 3B = 3.$ (1)

Por alcanzar la máxima graduación a los dos años es $G'(2) = 0$.

$G'(x) = 3x^2 - 2Ax + 6B.$

$G'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 2A \cdot 2 + 6B = 0;\ \ 12 - 4A + 6B = 0;$

$4A - 6B = 12;\ \ 2A - 3B = 6.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{matrix} -A + 3B = 3 \\ 2A - 3B = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{A = 9}.$ $\qquad -9 + 3B = 3;\ \ 3B = 12 \Rightarrow \underline{B = 4}.$

****

6º) El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \ \ (2 \leq x \leq 5).$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$P'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 30x - 24 = 0; \ \ x^2 - 5x + 4 = 0; \ \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \notin D(P)\ , x_2 = 4 \Rightarrow \text{Solución: } x = 4.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(x) = -12x + 30.$$

$$P''(4) = -12 \cdot 4 + 30 = -18 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo relativo para } x = 4.$$

$$P(4) = -2 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 30 = -2 \cdot 64 + 15 \cdot 16 - 96 + 30 =$$

$$= -128 + 240 - 66 = 240 - 194 = 46.$$

$$\underline{\textit{El mayor precio se produce para un diámetro de } 4 \textit{ cm}.}$$

$$\underline{\textit{El precio máximo es de } 0{,}46 \textit{ euros el kg}.}$$

$$P(2) = -2 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 30 = -2 \cdot 8 + 15 \cdot 4 - 48 + 30 =$$

$$= -16 + 60 - 18 = 60 - 34 = 26.$$

$$P(5) = -2 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 30 = -2 \cdot 125 + 15 \cdot 25 - 120 + 30 =$$

$$= -250 + 375 - 90 = 375 - 340 = 35.$$

El menor precio se produce para un diámetro de 2 *cm*.

El precio mínimo es de 0,26 *euros el kg*.

****

7º) a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$.

---

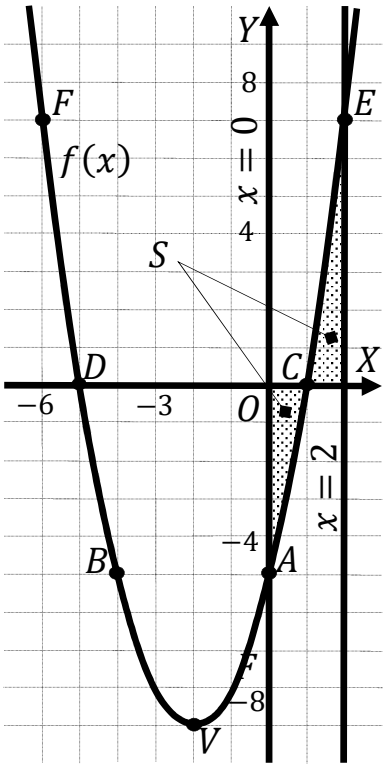
a)

La función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 =$$

$$= 4 - 8 - 5 = -9 \Rightarrow V(-2, -9).$$



Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$A(-5, 0), B(-4, -5), C(1, 0), D(-5, 0), E(2, 7)$ y

$F(-6, 7)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^2 f(x) \cdot dx = F(0) - F(1) + F(2) - F(1) =$$

$$= F(0) - 2F(1) + F(2).$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 + 4x - 5) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 5x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x.$$

$$S = 0 - 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) + \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} - 4 + 10 + \frac{8}{3} + 8 - 10 = 4 + \frac{6}{3} = 4 + 2 = 6.$$

$$\underline{S = 6\ u^2}.$$

b)

Las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ son las siguientes:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+4x-5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -5, x_1 = 1.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -5\ y\ x = 1\ son\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas oblicuas:

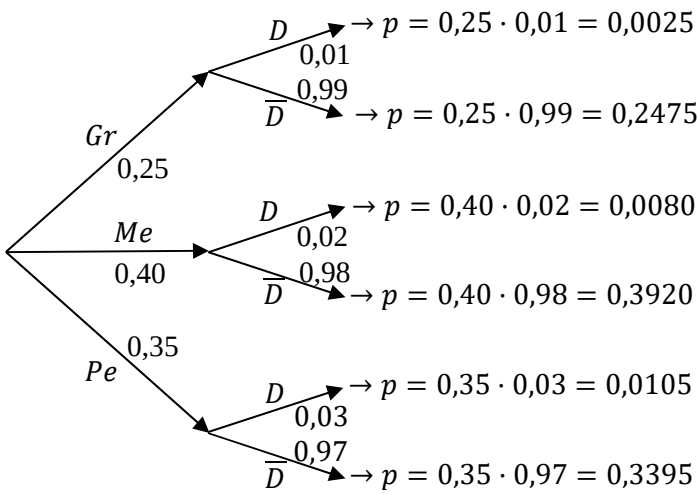
$$\underline{No\ tiene\ Asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales.}$$

****

8º) En una fábrica de vidrios el 25 % de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1 % de las botellas grandes, el 2 % de las medianas y el 3 % de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

b) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.



a)

$$P = P(Me \cap D) + P(Me) \cdot P(D/Me) = 0{,}40 \cdot 0{,}02 = \underline{0{,}0080}$$

$$= P(A) \cdot P(C/A) + P(I) \cdot P(C/I) + P(M) \cdot P(C/M) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}10 + 0{,}1 \cdot 0{,}20 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}080 + 0{,}020 + 0{,}005 = \underline{0{,}105}.$$

b)

$$P = P(D) = P(Gr \cap D) + P(Me \cap D) + P(Pe \cap D) =$$

$$= P(Gr) \cdot P(D/G) + P(Me) \cdot P(D/Me) + P(Pe) \cdot P(D/Pe) =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}40 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}0025 + 0{,}0080 + 0{,}0105 = \underline{0{,}0210}.$$

****

9º) Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 300;\;\; p = \frac{60}{300} = 0{,}2;\;\; q = 1-0{,}2 = 0{,}8;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{300}};\; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{300}}\right);$$

$(0{,}2 - 1{,}96 \cdot 0{,}0231;\; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot 0{,}0231);\;\; (0{,}2 - 0{,}0453;\; 0{,}2 + 0{,}0453).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (0{,}1547;\; 0{,}2453).}$$

****

10º) Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene una distribución normal con desviación típica 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95 %, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $\sigma = 3$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$; $E = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{3}{0{,}5}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 6)^2 = 11{,}76^2 = 138{,}30.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 139 *barras*

****