PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los repertorios que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Calcular, integrando por partes, el valor de: $I=\int_1^2 x^2 \cdot L\,x \cdot dx$.

$$I=\int_1^2 x^2 \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u=Lx \rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ x^2 \cdot dx = dv \rightarrow v=\frac{x^3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow I=\left[L\,x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x}\right]_1^2 =$$

$$=\left[\frac{x^3}{3} \cdot L\,x - \frac{1}{3}\int x^2 \cdot dx\right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{3} \cdot L\,x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{9}(3L\,x-1)\right]_1^2 =$$

$$=\left[\frac{8}{9}(3L\,2-1)\right]-\left[\frac{1}{9}(3L1-1)\right]=\frac{8}{9}(3L\,2-1)-\frac{1}{9}(-1)=\frac{24}{9}L2-\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=\underline{\underline{\frac{24L\,2-7}{9}=I}}$$

****

2º) La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos.

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando las propiedades de las matrices pueden hacerse las siguientes transformaciones:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_1 \to \frac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to 6F_1 \\ F_2 \to 2F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to \frac{1}{3}F_1 \\ F_3 \to -F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

3º) Calcular la distancia del punto P(1, 1, 2) al plano π que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$, B(1, 0, 1) y C(0, 1, 1).

En primer lugar determinamos el plano que pasa por los puntos A, B y C:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 1) - (1,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ 1)\ ;;$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1,\ 1) - (1,\ 1,\ 0) = (-1,\ 0,\ 1)$$

$$\pi \equiv \left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -(x-1)-(y-1)-z=0\ ;;$$

$$x-1+y-1+z=0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x+y+z-2=0}$$

Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d(P;\ \pi) = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Rightarrow d(P;\ \pi) = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades}}$$

****

4º) Determinar el dominio de definición de la función $f(x)=x-L\left(x^2-1\right)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y decrecimiento (máximos y mínimos relativos).

El dominio de f(x) es el conjunto de valores reales de x que hacen $x^2-1>0$, o sea:

$$x^2>1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D \Rightarrow (-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}}.$$

Los límites laterales nos proporcionan las asíntotas verticales y las tendencias:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left[x-L\left(x^2-1\right)\right]=-1-L\,0=-1-(-\infty)=-1+\infty=\underline{\underline{+\infty}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{Asíntota}: \underline{\underline{x=-1}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[x-L\left(x^2-1\right)\right]=1-L\,0=1-(-\infty)=1+\infty=\underline{\underline{+\infty}} \Rightarrow \textit{Asíntota}: \underline{\underline{x=1}}$$

Ahora vamos a determinar los máximos y mínimos relativos:

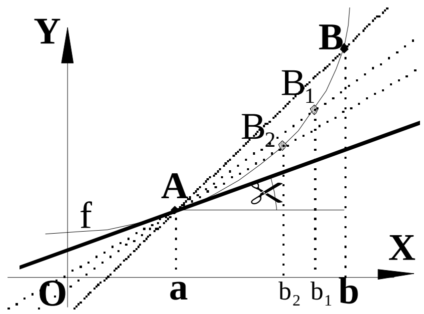
$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2-1-2x}{x^2-1}=\frac{x^2-2x-1}{x^2-1}\ ;;\ f'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x-1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=1+\sqrt{2}} \\ \underline{x_2=1-\sqrt{2}} \end{cases}$$

****

REPERTORIO B

1º) Definir el concepto de derivada de una función f(x) en un punto x = a, y explicar su relación con los máximos y mínimos relativos.



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando $b \to a$ (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

<u>la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.</u>

Una función f(x) tiene un máximo relativo para x = a si existe un entorno del punto a tal que $f(x) \leq f(a),\ \forall a \in R$.

De igual manera, una función f(x) tiene un mínimo relativo para x = a si existe un entorno del punto a tal que $f(x) \geq f(a),\ \forall a \in R$.

De lo anterior se deduce que, para que una función tenga un máximo relativo o un mínimo relativo es condición necesaria que la derivada sea cero.

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos observamos las pendientes de la función en los entornos del máximo y del mínimo:

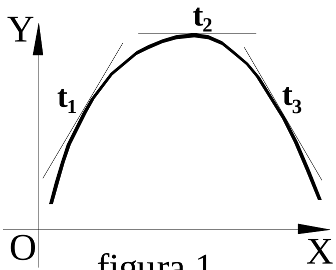


figura 1

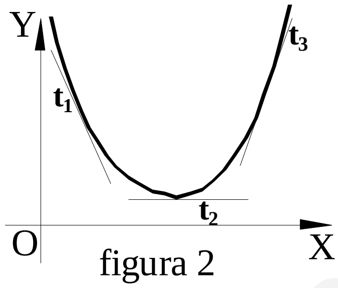


figura 2

En la figura 1 se observa que las tangentes van disminuyendo, $t_1 > t_2 > t_3$; como la tangente o pendiente es la derivada de la función, en el entorno de un máximo las derivadas constituyen una función creciente, por lo cual su derivada (f'') es positiva.

En la figura 2 se observa que las tangentes van creciendo, $t_1 < t_2 < t_3$; como la tangente o pendiente es la derivada de la función, en el entorno de un mínimo las derivadas constituyen una función decreciente, por lo cual su derivada (f'') es negativa.

En resumen:

$$\underline{\underline{Máximo\ \ relativo \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}}} \qquad \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}}}$$

****

2º) Calcular la distancia del punto P(3, 5, 0) a la recta r que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$ y B(0, 1, 1).

Un vector director de la recta es: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 2) = (0,\ 0,\ -1)$

La fórmula de la distancia de un punto a una recta es: $d\,(P,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}$, siendo A un punto cualquiera de la recta y P el punto dado .

$\overrightarrow{AP} = P - A = (3,\ 5,\ 0) - (0,\ 1,\ 2) = (3,\ 4,\ -2)$.

$$\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u}\right| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\| = \left|-4i + 3j\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \underline{5}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

$$d\,(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \frac{5}{1} = \underline{\underline{5\ \ unidades = d\,(P,\ \ r)}}$$

****

3º) Dar un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible.

Para que un sistema de ecuaciones lineales sea incompatible basta, por ejemplo, que dos de las rectas (ecuaciones) que forman el sistema sean paralelas, es decir: que sus vectores directores sean iguales o proporcionales.

Puede servir como ejemplo el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x-3y-z=5 \end{cases}$

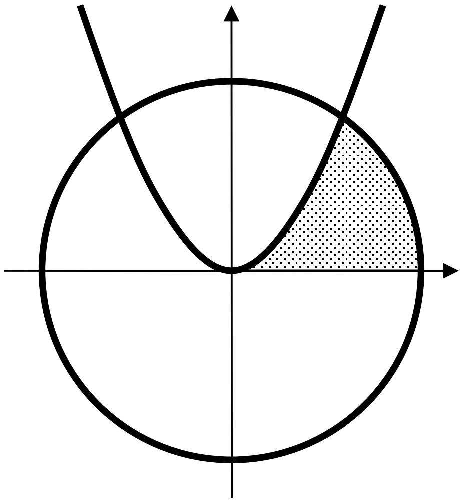
La solución es evidente: el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3.

El rango de la matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ es dos debido a que, en realidad, solo tiene dos vectores linealmente independientes, ya que los dos primero son iguales (podían ser proporcionales).

Según el Teorema de Rouché, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea incompatible es que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada no tengan el mismo rango.

****

4º) Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX, que aparece rayada en la figura.



El arco de circunferencia que limita la superficie pedida pertenece a la función: $y = +\sqrt{1-x^2}$.

La abscisa del punto de corte en el primer cuadrante de ambas funciones es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,x^2 \\ y = +\sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}\,x^2 = +\sqrt{1-x^2} \;\;;;\;\; 2x^4 = 1 - x^2 \;\;;;\;\; 2x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $z = x^2$, resulta: $2z^2 + z - 1 = 0$. Resolviendo:

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} \\ z_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \; x = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} = x}$$

El radio de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow \underline{r = 1}$

El área pedida es la siguiente:

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2} \cdot x^2 \cdot dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + I = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 0^3\right] + I =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} + I = \underline{\frac{1}{6} + I = A} \qquad (*)$$

$$I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot dx \Rightarrow \begin{cases} x = sen\ t \\ dx=\cos t\cdot dt \end{cases} \Bigg\| \left.\begin{matrix} x=1\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow t=\dfrac{\pi}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sen^2\, t}\cdot\cos t\cdot dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\cdot dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot dt\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos(2t)=\cos^2 t-sen^2\, t \\ \cos(2t)=2\cos^2 t-1 \\ \cos^2 t=\dfrac{1+\cos(2t)}{2} \end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\cdot dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2t)}{2}\cdot dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot[t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cdot I_1=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]+I_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+I_1=\frac{\pi}{8}+I_1 \qquad (**)$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\cdot dt\Rightarrow\begin{cases} 2t=u \\ dt=\dfrac{1}{2}\cdot du \end{cases}\Bigg\| \left.\begin{matrix} t=\dfrac{\pi}{2}\rightarrow u=\pi \\ t=\dfrac{\pi}{4}\rightarrow u=\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos u\cdot\frac{1}{2}\cdot du=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos u\cdot du=\frac{1}{4}\cdot[sen\ u]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{4}\left(sen\ \pi-sen\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}(0-1)=\underline{-\frac{1}{4}=I_1}$$

Sustituyendo en (**) el valor obtenido de I_1, queda:

$$I=\frac{\pi}{8}+I_1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{\pi-2}{8}=I}$$

Sustituyendo, finalmente, el valor de I en (*), quda:

$$A=\frac{1}{6}+I=\frac{1}{6}+\frac{\pi-2}{8}=\frac{4+3\pi-6}{24}=\underline{\underline{\frac{3\pi-2}{24}\,u^2=Área}}$$

****