

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****JUNIO – 2002**

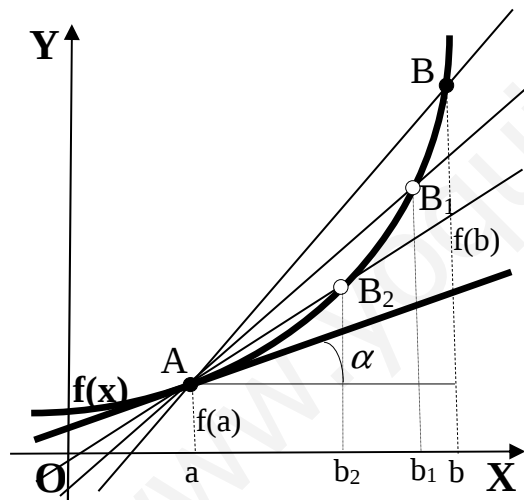
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen. Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ y explicar su relación con el crecimiento de la función.



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A , de abscisa a . Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado $[a, b]$ a la expresión:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

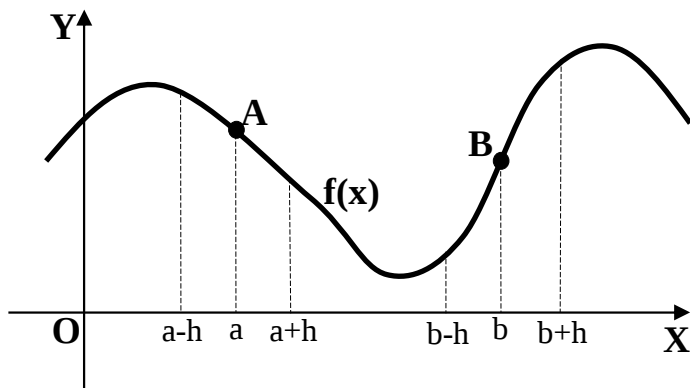
La $TVM[a, b]$ es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los puntos A y B .

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \rightarrow a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable $b - a = h$, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A , con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.



En un punto de la función A, cuya abscisa es a , donde la función es decreciente se observa que a un incremento positivo de a el valor de la función es negativo y viceversa, es decir, que si se divide el incremento de la función entre el incremento de la variable independiente, el cociente, que en el límite cuando el incremento tiende a cero es la derivada, es siem-

pre negativo, lo cual implica necesariamente que:

Una función es decreciente en un punto cuando su derivada es negativa.

En el punto B, de abscisa b , la función es creciente y se observa que a un incremento positivo de b el valor de la función disminuye y viceversa, lo cual significa, por un razonamiento similar al anterior que:

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva.

2º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales
$$\left. \begin{array}{l} ay + (a+1)z = a \\ ax + z = a \\ x + az = a \end{array} \right\} \text{según el valor del parámetro } a.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} ; M' = \begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & a \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - a^3 = a(1 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ inc.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

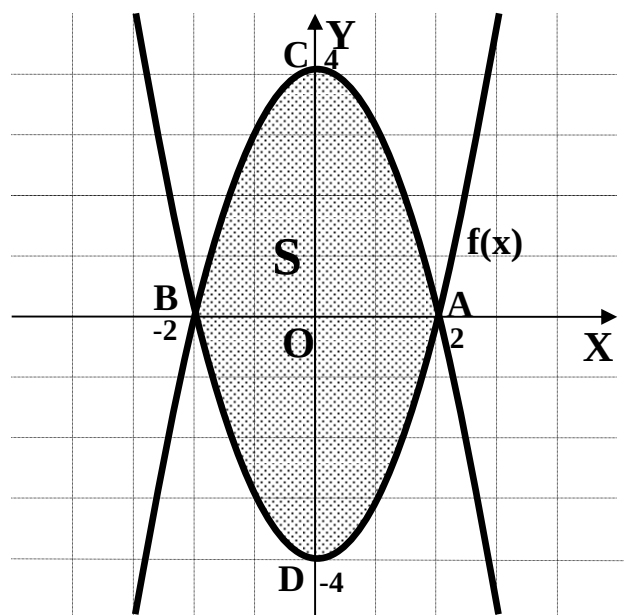
$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ inc.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Veamos cual es el rango de } M':$$

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \underline{\text{Incompatible}}$$

3º) Representar gráficamente y calcular el área de la figura plana delimitada por las siguientes parábolas: $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$.



Las dos parábolas son funciones opuestas y simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte con los ejes de las funciones son:

Eje X $\rightarrow y = 0$:

$$y = 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2, 0)} \end{cases}$$

$$y = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2, 0)} \end{cases}$$

$$\text{Eje Y: } \rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \rightarrow y = 4 \Rightarrow \underline{C(0, 4)} \\ y = x^2 - 4 \rightarrow y = -4 \Rightarrow \underline{D(0, -4)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se puede observar en el gráfico.

Como consecuencia de las simetrías de las funciones, el área pedida es:

$$S = 4 \cdot \int_0^2 (4 - x^2) \cdot dx = 4 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 \cdot \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 4 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 4 \cdot \frac{16}{3} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{64}{3}}} u^2 = S$$

4º) Hallar dos vectores linealmente dependientes que sean ortogonales al vector $\vec{e} = (1, 1, 3)$.

Sean los vectores pedidos $\vec{u}$ y $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, $\forall k \in R$, $\{k \neq 0\}$.

Por ser los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales a $\vec{e}$ tiene que cumplirse que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = \vec{v} \cdot \vec{e} = 0$$

Como existen infinitos vectores que cumplen la condición, fijamos dos de sus componentes y calculamos la tercera, por ejemplo: $\vec{u} = (1, 2, x)$ y $\vec{v} = (k, 2k, kx)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = (1, 2, x) \cdot (1, 1, 3) = 1 + 2 + 3x = 3 + 3x = 0 \quad ; ; \quad 3x = -3 \quad ; ; \quad \underline{x = -1}$$

Los vectores pedidos pueden ser:

$$\underline{\underline{\vec{u} = (1, 2, -1) \text{ y } \vec{v} = (k, 2k, -k)}}$$

REPERTORIO B

1º) Representar gráficamente la función $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$, determinando los intervalos donde es creciente.

Para representar gráficamente la función vamos a estudiar los siguientes puntos:

I) Dominio: $f(x) = 2x + (2x)^{-1} = 2x + \frac{1}{2x} = \frac{4x^2 + 1}{2x} \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

II) Corte con los ejes:

Eje X $\Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$; $x \notin R \Rightarrow \underline{\text{La función no corta al eje X.}}$

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0} = \infty \notin R \Rightarrow \underline{\text{La función no corta al eje Y.}}$

III) Simetrías:

Con respecto al eje Y $\Rightarrow$ No es una función par. No es simétrica a Y.

Con respecto al origen $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \underline{\text{Es simétrica con respecto al origen.}}$

IV) Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{8x \cdot 2x - 2(4x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = 0 \quad ; \quad 4x^2 - 1 = 0 \quad ; \quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } |x| > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente } \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)}}$$

V) Máximos y mínimos relativos:

$$f''(x) = \frac{8x \cdot 2x^2 - 4x \cdot (4x^2 - 1)}{4x^4} = \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{x^3} = \frac{1}{x^3} = \underline{f''(x)}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x = \frac{1}{2}}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} + 1}{1} = \frac{1+1}{1} = 2 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo}} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{2}, 2\right)}$$

Por simetría con respecto al origen $\Rightarrow$ Mínimo relativo $\Rightarrow \underline{Q\left(-\frac{1}{2}, -2\right)}$

VI) Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Convexidad } (\cup) \Rightarrow (0, +\infty)} \\ x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Concavidad } (\cap) \Rightarrow (-\infty, 0)} \end{cases}$$

VII) Puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\text{No tiene puntos de inflexión.}}$

VIII) Asíntotas:

Paralelas a X: $y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene.}}$

Paralelas a Y: $2x = 0 \rightarrow \underline{x = 0}$

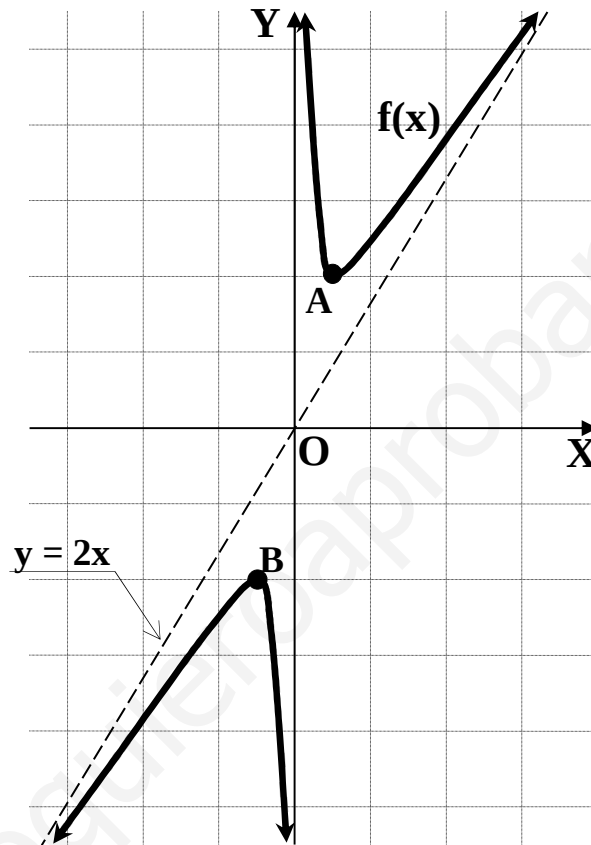
Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$.

$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x^2} = 2 = m \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{2x^2} = 0 = n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{y = 2x}$$

IX) Tabla de valores:

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2
F(x)	2	-2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$	$-\frac{17}{4}$
	Máx.	Mín.				

X) Representación gráfica:



2º) Calcular la matriz X tal que $A \cdot X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Sea la matriz pedida $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2c=1 \\ b+2d=2 \\ \underline{c=3} \\ \underline{d=4} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{a=-5} \\ \underline{b=-6} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Otra forma de hacer este ejercicio es mediante la matriz inversa de A:

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} en $A \cdot X = B$, resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B ;; I \cdot X = A^{-1} \cdot B ;; \underline{X = A^{-1} \cdot B} \quad (*)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ;; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ;; \text{Adj. de } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A^{-1}}}$$

Sustituyendo en (*) y operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-8 \\ 0+3 & 0+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}} = X$$

3º) Calcular el valor de la integral $I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} \cdot dx$.

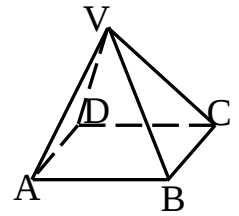
$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = u \rightarrow dx = du \\ e^{-x} \cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow I = \left[x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= \left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx \right]_0^1 = \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = \left[-e^{-x} (x+1) \right]_0^1 = -e^{-1} (1+1) - \left[-e^0 (0+1) \right] =$$

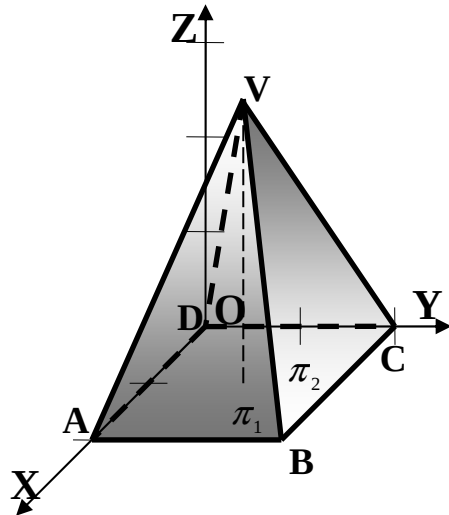
$$= -2e^{-1} - (-1 \cdot 1) = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} u^2 = I$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) La base de una pirámide es un cuadrado ABCD de 2 metros de lado y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.



Situando la pirámide en unos ejes coordenados, de tal manera que uno la base coincida con el plano $z = 0$ y uno de sus vértices con el origen de coordenadas, tal como se indica en la gráfica siguiente.



Las coordenadas de los diferentes puntos son las siguientes:

$A(2, 0, 0)$; $B(2, 2, 0)$; $C(0, 2, 0)$; $D(0, 0, 0)$ y el vértice es $V(1, 1, 3)$.

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (1, 1, 3) - (2, 0, 0) = (-1, 1, 3) = \overrightarrow{AV}$$

$$\overrightarrow{BV} = V - B = (1, 1, 3) - (2, 2, 0) = (-1, -1, 3) = \overrightarrow{BV}$$

$$\overrightarrow{CV} = V - C = (1, 1, 3) - (0, 2, 0) = (1, -1, 3) = \overrightarrow{CV}$$

El plano π_1 , determinado por los puntos ABV, se puede expresar en función de los vectores $\overrightarrow{AV}$ y $\overrightarrow{BV}$ y el vértice V:

$$\pi_1(V, \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BV}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 ;;$$

$$3(x-1) + (z-1) - 3(y-1) + (z-1) + 3(x-1) + 3(y-1) = 0 ;; 6(x-1) + 2(z-1) = 0 ;;$$

$$3x - 3 + z - 1 = 0 ;; \underline{\pi_1 \equiv 3x + z - 4 = 0} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n_1} = (3, 0, 1)}$$

El plano π_2 , determinado por los puntos BCV, se puede expresar en función de los vectores $\overrightarrow{BV}$ y $\overrightarrow{CV}$ y el vértice V:

$$\pi_2(V, \overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CV}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 ;;$$

$$-3(x-1) + (z-1) + 3(y-1) + (z-1) + 3(x-1) + 3(y-1) = 0 ;; 6(y-1) + 2(z-1) = 0 ;;$$

$$3y - 3 + z - 1 = 0 ;; \underline{\pi_2 \equiv 3y + z - 4 = 0} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n_2} = (0, 3, 1)}$$

Los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son unos vectores normales de los planos π_1 y π_2 , respectivamente.

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

Teniendo en cuenta que, aplicando el producto escalar de dos vectores que:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{(3, 0, 1) \cdot (0, 3, 1)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{10} = 0.1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 84^\circ 15' 39''}}$$
