PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Un restaurante ofrece cada día desayunos, comidas y cenas. Los desayunos cuestan 4 euros, las comidas 8 y las cenas 10. El último sábado se sirvieron tantas comidas como desayunos y cenas juntos. La recaudación total fue de 1.116 euros. La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros.

a) ¿Cuántos desayunos, comidas y cenas se sirvieron?

b) ¿Qué beneficio se obtuvo si las ganancias de un desayuno son 2,5 euros, las de una comida 4 euros y las de una cena 5 euros?

----

a)

Sean x, y, z el número de desayunos, comidas y cenas que sirvió el último sábado el restaurante, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} y = x + z \\ 4x + 8y + 10z = 1.116 \\ 8y - 10z = 156 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 558 \\ 4y - 5z = 78 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 558 & 4 & 5 \\ 78 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{2.232-390-312-2.790}{-20+8-20-10} = \frac{2.232-3.492}{-42} = \frac{-1.260}{-42} = 30.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 558 & 5 \\ 0 & 78 & -5 \end{vmatrix}}{-42} = \frac{-2.790+156-390}{-42} = \frac{156-3.180}{-42} = \frac{-3.024}{-42} = 72.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 558 \\ 0 & 4 & 78 \end{vmatrix}}{-42} = \frac{312-2.232+156}{-42} = \frac{468-2.232}{-42} = \frac{-1.764}{-42} = 42.$$

$$\underline{Se\ sirvieron\ 30\ desayunos, 72\ comidas\ y\ 42\ cenas}.$$

$b)$

$$Beneficio = 2{,}5x + 4y + 5z = 2{,}5 \cdot 30 + 4 \cdot 72 + 5 \cdot 42 =$$

$$= 75 + 288 + 210 = 573.$$

$$\underline{Se\ obtuvo\ un\ beneficio\ de\ 573\ euros}.$$

****

2º) Dada la función continua $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{x^2}{2}+4x+1 & 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$.

a) Calcula sus máximos absolutos y sus mínimos absolutos, razonando que, efectivamente, lo son.

b) Calcula el valor de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[5, 7]$.

----

a)

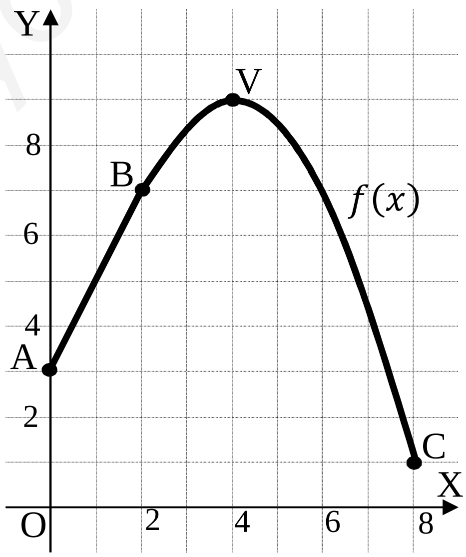
Con objeto de facilitar la comprensión del ejercicio se hace un dibujo aproximado de la función.

Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(0, 2)$ se trata de la expresión $f(x) = 2x + 3$ cuyos puntos extremos son $A(0, 3)$ y $B(2, 7)$. En el intervalo $(2, 8)$ se trata de la expresión $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x + 1$, que es una parábola cóncava $(\cap)$, cuyo vértice, que es un máximo absoluto que se deduce de la continuidad de la función, es el siguiente:

$$f'(x) = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$$f(4) = -\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 + 1 = -8 + 17 = 9 \ \Rightarrow V(4, 9).$$

Los valores que toma la función en los valores extremos del intervalo $(2, 8)$ son $B(2, 7)$ y $f(8) = -\frac{8^2}{2} + 4 \cdot 8 + 1 = -32 + 32 + 1 = 1 \ \Rightarrow C(8, 1)$.



De la observación de la figura se observa que:

$\underline{El\ máximo\ absoluto\ es\ V(2, 9)\ y\ el\ mínimo\ absoluto\ es\ C(8, 1).}$

$b)$

$$\int_5^7 f(x)\cdot dx = \int_5^7 \left(-\frac{x^2}{2}+4x+1\right)\cdot dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+x\right]_5^7 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{6}+2x^2+x\right]_5^7 = \left(-\frac{7^3}{6}+2\cdot 7^2+7\right)-\left(-\frac{5^3}{6}+2\cdot 5^2+5\right) =$$

$$= -\frac{343}{6}+98+7+\frac{125}{6}-50-5 = -\frac{218}{6}+50 = \frac{-218+300}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}.$$

$$\underline{\int_5^7 f(x)\cdot dx = \frac{41}{3}}.$$

****

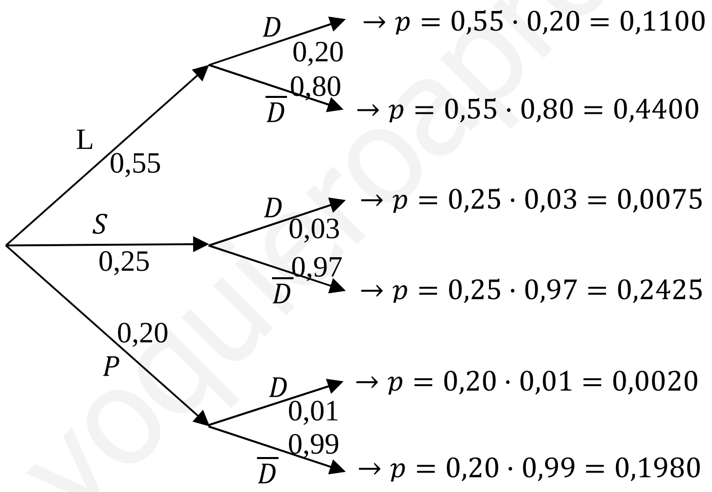
3º) El 55 % de los empleados de una empresa son licenciados, el 25 % tienen nivel de estudios de educación secundaria y el resto tan sólo nivel de estudios primarios. Un 20 % de los licenciados, un 3 % de los que tienen educación secundaria y un 1 % de los que tienen estudios primarios ocupan un puesto directivo en la empresa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un directivo de la empresa elegido al azar sea licenciado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar no sea directivo y su nivel de estudios sea de estudios primarios?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar tenga nivel de estudios secundarios o sea directivo?

$L \rightarrow licenciado; \ \ S \rightarrow secundarios; \ \ P \rightarrow primarios.$
$D \rightarrow directivo; \ \ \overline{D} \rightarrow no\ directivo.$



a)

$$P = \frac{0,1100}{0,1100+0,0075+0,0020} = \frac{0,1100}{0,1185} = \underline{0,9283}.$$

b)

$$P = 0,20 \cdot 0,99 = \underline{0,1980}.$$

c)

$$P = 0,2500 + 0,1100 + 0,0020 = \underline{0,3620}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

$a)\ (A-I)^2.$ $b)\ A \cdot B^t.$ $c)\ A - B^{-1}.$

(I es la matriz identidad y $B^t\ y\ B^{-1}$ las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente).

$a)$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\frac{3}{2} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, calcula:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) Representa gráficamente la función a partir de la información de los apartados anteriores.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f)\ \Rightarrow R-\{-1,1\}}.$$

$$\underline{El\ \text{único}\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1\Rightarrow\ \underline{As\acute{\imath}ntota\ horizontal\colon y=1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{As\acute{\imath}ntotas\ verticales\colon x=-1, x=1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1-x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función:

$$Para\ x<0\Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento\colon(-\infty,-1)\cup(-1,0)}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow\ f'(x) < 0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: (0,1) \cup (1,+\infty)}.$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-1)^2-2x\cdot[2\cdot(x^2-1)\cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-1)-8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2+2-8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{2-10x^2}{(x^2-1)^3} =$$

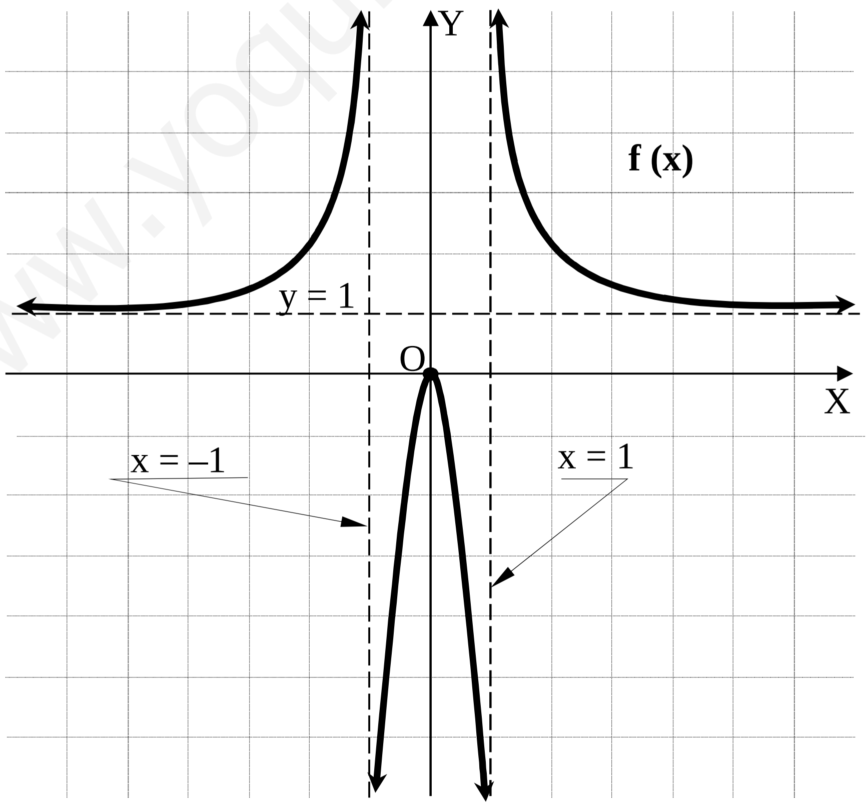
$$= \boldsymbol{\frac{2(1-5x^2)}{(x^2-1)^3}}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{-1} = -2 < 0\ \Rightarrow \boldsymbol{M\acute{a}ximo\ relativo\ para\ x = 0}.$$

$$f(0) = \frac{0}{0-1} = 0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{M\acute{a}ximo: O(0,0)}.$$

$e)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) El 35 % de los alumnos de un instituto viste vaqueros y el 50 % lleva calzado deportivo. El 30 % de ellos no usa ni vaqueros ni calzado deportivo. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros o use calzado deportivo?

b) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros y use calzado deportivo?

c) La probabilidad de que un alumno elegido al azar vista vaqueros pero no use calzado deportivo?

d) Si se elige un alumno al azar y se observa que no lleva calzado deportivo, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve vaqueros?

$Datos$:

$P_{Vaqueros} = P(V) = 0{,}35.$ $\quad$ $P_{Deportivos} = P(D) = 0{,}50.$

$P\left(\overline{V \cup D}\right) = P\left(\overline{V} \cap \overline{D}\right) = 0{,}3.$

a)

$¿P(V \cup D)?$ $\quad$ $P(V \cup D) = 1 - P\left(\overline{V \cup D}\right) = 1 - 0{,}3 = \underline{0{,}7}.$

b)

$¿P(V \cap D)?$

$P(V \cap D) = P(V) + P(D) - P(V \cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(V \cap D) = P(V) + P(D) - P(V \cup D) = 0{,}35 + 0{,}50 - 0{,}7 = \underline{0{,}15}.$

c)

$¿P\left(V \cup \overline{D}\right)?$ $\quad$ $P\left(V \cup \overline{D}\right) = P(V) - P(V \cap D) = 0{,}35 + 0{,}15 = \underline{0{,}20}.$

d)

$¿P\left(\overline{V}\middle|\overline{D}\right)?$

$$P\left(\overline{V}\middle|\overline{D}\right) = \frac{P\left(\overline{V} \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0{,}3}{1 - P(D)} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \underline{0{,}6}.$$

****