PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio?

Sean x e y el número de litros de cerveza de los tipos A y B que se producen en la empresa, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{matrix} x \geq 200 \\ x + y \leq 900 \\ y \geq 2x \end{matrix}\right\}$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 2x + 2{,}5y$.

$① \Rightarrow x + y \leq 900 \Rightarrow y \leq 900 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	900	0
y	0	900

$② \Rightarrow y \geq 2x \Rightarrow P(100,0) \rightarrow No.$

x	0	300
y	0	600

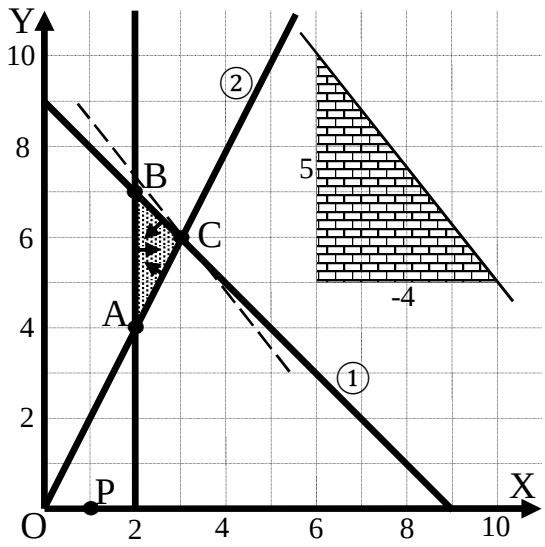
La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 200 \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(200, 400).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 200 \\ x + y = 900 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(200, 700).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 900 \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(300, 600).$$



Los valores de la función de objetivos $f(x, y) = 2x + 2{,}5y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(200, 400) =$$

$$= 2 \cdot 200 + 2{,}5 \cdot 400 = 400 + 900 = 1.300.$$

$$B \Rightarrow f(200, 700) = 2 \cdot 200 + 2{,}5 \cdot 700 = 400 + 1.750 = 2.150.$$

$$C \Rightarrow f(300, 600) = 2 \cdot 300 + 2{,}5 \cdot 600 = 600 + 1.500 = 2.100.$$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 2x + 2{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{2{,}5}x = \frac{4}{5}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}}.$$

El máximo beneficio se produce elaborando 200 *litros de A y* 700 *de B*.

El beneficio máximo es de 2.150 *euros*.

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales. d) Representación gráfica.

e) A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, razona en qué puntos la función $g(x) = (x-2)^2 - 2(x-2)^2 + x - 2$ tiene un máximo o un mínimo local.

---

a)

Por ser $f(x)$ una función polinómica: $\underline{f(x) \Rightarrow R}$.

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

Los puntos de corte con el eje X, además del origen, son los siguientes:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0;\ \ x(x^2 - 2x + 1) = 0;\ \ x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A(1,0)}.$$

b)

Una función es creciente y decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$$

Las raíces de la primera derivada de la función dividen al dominio de la función en tres periodos alternativos de crecimiento y decrecimiento.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 0)$ es $f'(0) = 1 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: \left(\frac{1}{3}, 1\right)}.$$

$c)$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un mínimo.

$$f''(x) = 6x - 4.$$

$$f''\left(\tfrac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow M\acute{a}ximo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{3}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow \underline{M\acute{a}x. \Rightarrow B\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)}.$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 6 - 4 = 2 > 9 \Rightarrow M\acute{i}nimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{M\acute{i}n. \Rightarrow C(1,0)}.$$

$d)$

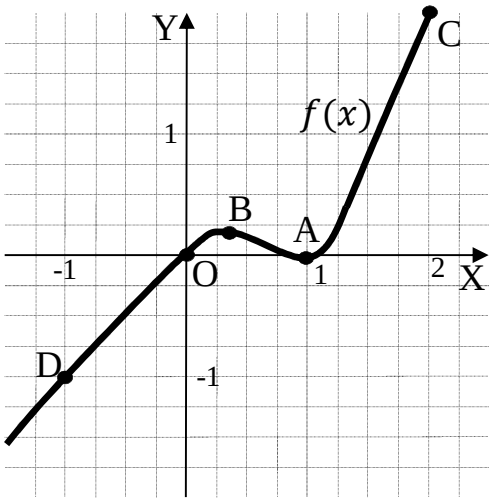
Además de los hallados, también son puntos de la función los siguientes:

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 8 + 2 =$$

$$= 2 \rightarrow C(2,2).$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 2 =$$

$$-1 - 2 + 2 = -1 \rightarrow D(-1,-1).$$



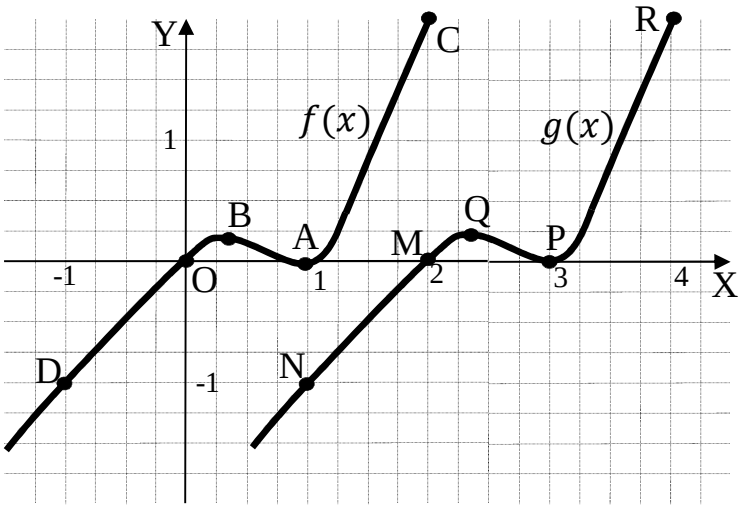
La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

$e)$

Teniendo en cuenta que si $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ es:

$g(x) = f(x-2) = (x-2)^2 - 2(x-2)^2 + x - 2$. Si $f(x)$ tiene un mínimo local en $A(1,0)$, $\underline{g(x)\ tiene\ un\ m\acute{i}nimo\ en\ el\ punto \Rightarrow \begin{Bmatrix} x-2=1 \\ x=3 \end{Bmatrix} \Rightarrow P(3,0)}$ y $\underline{g(x)\ tiene\ un\ m\acute{a}ximo\ en\ el\ punto \Rightarrow \begin{Bmatrix} x-2=\frac{1}{3} \\ x=\frac{7}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)}$.

En definitiva: la función $g(x)$ se obtiene desplazando dos unidades a la derecha a la función $f(x)$.



****

3º) Imagina cinco sillas alineadas 1, 2, 3, 4, 5 y que un individuo está sentado inicialmente en la silla central (número 3). Se lanza una moneda al aire y, si el resultado es cara, se desplaza a la silla situada a su derecha, mientras si el resultado es cruz, se desplaza a la situada a su izquierda. Se realizan sucesivos lanzamientos (y los cambios de silla consecutivos correspondientes) teniendo en cuenta que si tras alguno de ellos llega a sentarse en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5), permanecerá sentado en ella con independencia de los resultados de los lanzamientos posteriores. Se pide:

a) Dibujar el diagrama del árbol para cuatro lanzamientos de moneda.

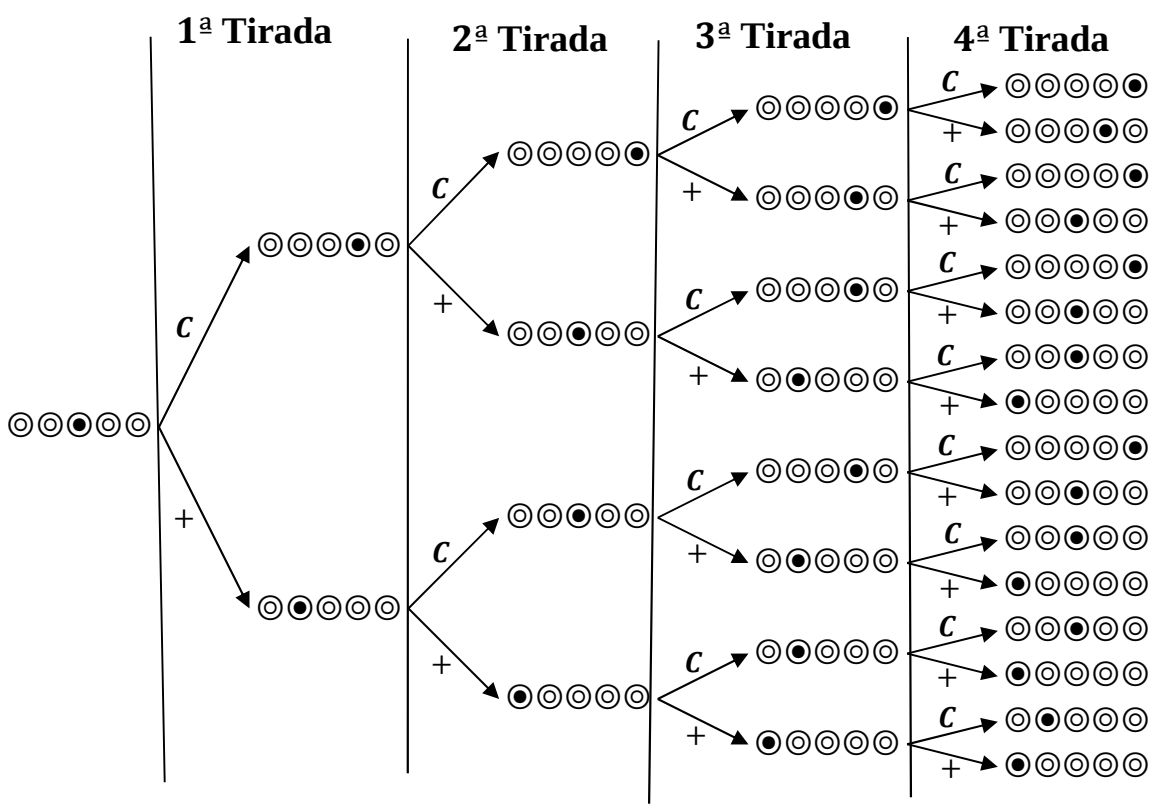
b) La probabilidad de que tras los tres primeros lanzamientos esté sentado en la silla central (3).

c) La probabilidad de que tras los tres primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

d) La probabilidad de que tras los cuatro primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

---

a)



b)

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{0}{8} = \underline{0}.$$

c)

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{2}{8} = \underline{\frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

$d)$

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{8}{16} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5.}$$

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Determina las matrices $X\ e\ Y$ que satisfacen las relaciones: $\left.\begin{matrix} X+2Y=A^t+B \\ X-Y=AB \end{matrix}\right\}$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A las matrices A y B son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{matrix} X+2Y=A^t+B \\ X-Y=AB \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} X+2Y=A^t+B \\ -X+Y=-AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3Y=A^t+B-AB \Rightarrow Y=\frac{A^t+B-AB}{3}.$$

$$X=Y+AB=\frac{A^t+B-AB}{3}+AB=\frac{A^t+B-AB+3AB}{3}=\frac{A^t+B+2AB}{3}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^t=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Y=\frac{1}{3}\cdot(A^t+B-AB)=\frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -12 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X=\frac{1}{3}\cdot(A^t+B+2AB)=\frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 22 & 4 & 6 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 4 & -3 \\ 21 & 9 & 7 \\ 27 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 4 & -3 \\ 21 & 9 & 7 \\ 27 & 1 & 2 \end{pmatrix}.\ \ Y=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -12 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

****

2º) Un analista pronostica que el beneficio $B(x)$ en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión: $B(x) = \begin{cases} -0{,}01x^2 + 0{,}09x + 0{,}1 & si \;\; 0 < x \leq 8 \\ 1{,}26 \cdot \frac{x}{x^2-1} + 0{,}02 & si \;\; x > 8 \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de $B(x)$.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?

d) Si se invierte un capital elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

---

a)

La función $B(x)$ es continua en R, excepto para el valor de $x = 8$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales en ese punto e igual al valor de la función.

$$\lim_{x \to 8^-} B(x) = \lim_{x \to 8}(-0{,}01x^2 + 0{,}09x + 0{,}1) = -0{,}01 \cdot 8^2 + 0{,}09 \cdot 8 + 0{,}1 =$$

$$= -0{,}64 + 0{,}72 + 0{,}1 = 0{,}82 - 0{,}64 = 0{,}18 = f(8).$$

$$\lim_{x \to 8^+} B(x) = \lim_{x \to 8}\left(1{,}26 \cdot \frac{x}{x^2-1} + 0{,}02\right) = 1{,}26 \cdot \frac{8}{8^2-1} + 0{,}02 = \frac{10{,}08}{63} + 0{,}02 =$$

$$= 0{,}16 + 0.02 = 0{,}18.$$

$$\underline{\lim_{x \to 8^-} B(x) = \lim_{x \to 8^+} B(x) = f(8) \Rightarrow B(x) \; es \; continua \; en \; R.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$B'(x) = \begin{cases} -0{,}02x + 0{,}09 & si \;\; 0 < x \leq 8 \\ -1{,}26 \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & si \;\; x > 8 \end{cases}.$$

$$-0{,}02x + 0{,}09 = 0; \;\; 2x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función, que $-1{,}26 \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ para cualquier valor real de x, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: \left(0, \frac{9}{2}\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: \left(\frac{9}{2}, +\infty\right).}$$

$c)$

De la continuidad y los periodos de crecimiento se deduce el máximo de la función, no obstante, se deduce mediante el cálculo con derivadas.

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada:

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 4{,}5.$

Para el intervalo que nos ocupa: $B''(x) = -0{,}02 < 0 \Rightarrow Máx. para\ x = 4{,}5.$

$B(4{,}5) = -0{,}01 \cdot 4{,}5^2 + 0{,}09 \cdot 4{,}5 + 0{,}1 = 0{,}2025 + 0{,}405 + 0{,}1 =$

$= 0{,}505 - 0{,}2025 = 0{,}3025.$

$$\underline{Conviene\ invertir\ 4.500\ euros}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.025\ euros}.$$

$d)$

$\lim_{x\to\infty} B(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1{,}26 \cdot \frac{x}{x^2-1} + 0{,}02\right) = 0{,}02.$

$$\underline{Si\ se\ invierte\ una\ fuerte\ cantidad\ el\ beneficio\ es\ de\ 20\ euros}.$$

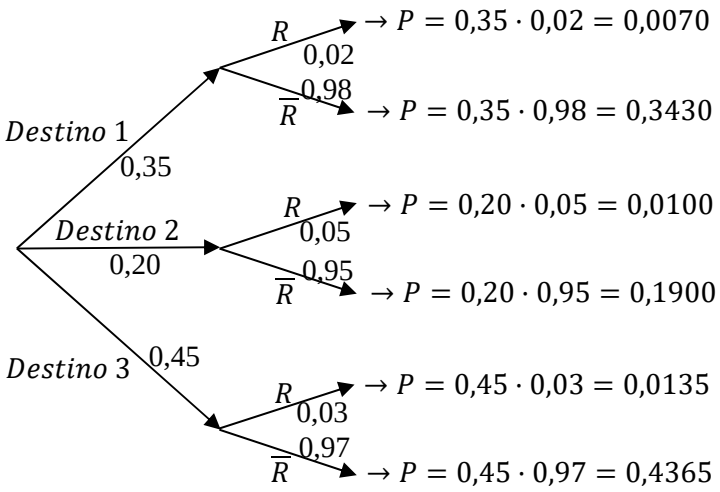
****

3º) Una compañía de transporte interurbano cube el desplazamiento a tres municipios distintos. El 35 % de los recorridos diarios realizados por los autobuses de esta compañía corresponden al destino 1, el 20 % al destino 2 y el 45 % al destino 3. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un recorrido de autobús sufra un retraso es del 2 %, 5 % y 3 % para cada uno de los destinos 1, 2 y 3, respectivamente.

a) ¿Qué porcentaje de los recorridos diarios de esta compañía llegan con puntualidad a su destino?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un recorrido seleccionado al azar corresponda al destino 2 y haya experimentado un retraso?

c) Si seleccionamos un recorrido al azar y resulta que sufrió un retraso, ¿cuál era el destino más probable de dicho recorrido?



a)

$$P = P(1) \cdot P\left(\overline{R}/1\right) + P(2) \cdot P\left(\overline{R}/2\right) + P(3) \cdot P\left(\overline{R}/3\right) =$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}20 \cdot 0{,}95 + 0{,}45 \cdot 0{,}97 = 0{,}3430 + 0{,}1900 + 0{,}4365 = \underline{0{,}9695}.$$

Llegan con puntualidad el 96,95 % *de los recorridos*.

b)

$$P = P(2) \cdot P(R/2) = 0{,}20 \cdot 0{,}0{,}5 = 0{,}10.$$

La probabilidad de un recorrido sea del destino 2 *y con retraso es del* 10 %.

c)

Recorrido 1º:

$$P = P(R/1) = \frac{P(1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(1) \cdot P(R/1)}{P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3)} =$$

$$= \frac{0{,}35 \cdot 0{,}02}{0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0070}{0{,}0070 + 0{,}0100 + 0{,}0135} = \frac{0{,}0070}{0{,}0305} = \underline{0{,}2295}.$$

Recorrido 2º:

$$P = P(R/2) = \frac{P(2 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(2) \cdot P(R/2)}{P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3)} =$$

$$= \frac{0{,}20 \cdot 0{,}05}{0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0100}{0{,}0070 + 0{,}0100 + 0{,}0135} = \frac{0{,}0100}{0{,}0305} = \underline{0{,}3279}.$$

Recorrido 3º:

$$P = P(R/3) = \frac{P(3 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(3) \cdot P(R/3)}{P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3)} =$$

$$= \frac{0{,}45 \cdot 0{,}03}{0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0135}{0{,}0070 + 0{,}0100 + 0{,}0135} = \frac{0{,}0135}{0{,}0305} = \underline{0{,}4426}.$$

Como se observa, el mayor porcentaje de tener retraso en el recorrido 3º.

****